VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Санкт-Петербургский
государственный университет аэрокосмического приборостроения

В. С. Калашников, А. В. Прусов

ТЕХНИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Направляющие системы и направляемые волны

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2001

УДК 537.8
ББК 22.31
К17

Калашников В. С., Прусов А. В.
К17 Техническая электродинамика. Направляющие системы и направляемые волны: Учеб. пособие / СПбГУАП. СПб., 2001. 48 с.: ил.

Рассмотрены общие свойства направляемых волн и структура электромагнитного поля собственных волн в прямоугольном и круглом волноводах.

Пособие предназначено для студентов дневной и вечерней форм обучения по направлениям 200800 "Проектирование и технология РЭС" и 200700 "Радиотехника".

Рецензенты:
кафедра радиотехники Северо-Западного государственного заочного технического университета;
доктор технических наук профессор *В. М. Балашов*

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

© Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, 2001

© В. С. Калашников, А. В. Прусов, 2001

1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Классификация линий передачи

Различают свободные и направляемые электромагнитные волны. Свободными называются электромагнитные волны, распространяющиеся в неограниченном пространстве. Направляемыми называются электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль линий передачи.

Линией передачи называют устройство, ограничивающее область распространения электромагнитных волн и обеспечивающее движение потока энергии электромагнитной волны в заданном направлении. Линии передачи могут быть регулярными и нерегулярными, однородными и неоднородными.

Регулярной называют линию передачи, у которой поперечное сечение и электрофизические свойства заполняющих ее сред являются неизменными вдоль всей линии. Нерегулярной называют линию передачи, у которой нарушено хотя бы одно условие регулярности.

Однородной называют линию передачи, заполненную однородной средой. Неоднородной – линию передачи, заполненную неоднородной средой.

В зависимости от наличия или отсутствия в конструкции линии передачи замкнутого проводящего экрана, отделяющего область пространства, в которой распространяется направляемая волна, от окружающей среды, различают волноводы и открытые линии передачи. Волноводами называются линии передачи, в поперечном сечении которых имеется один или несколько замкнутых проводящих контуров, охватывающих область распространения направляемых волн. В поперечном сечении открытых линий передачи таких контуров нет.

Геометрической характеристикой поперечного сечения линии передачи, определяющей количество изолированных проводящих поверхностей, входящих в состав ее конструкции, является «порядок связности» линии передачи. Различают односвязные, двухсвязные, многосвязные линии и линии передачи нулевой связности.

1.2. Некоторые виды линий передачи

На рис. 1 приведены эскизы поперечных сечений некоторых видов линий передачи:

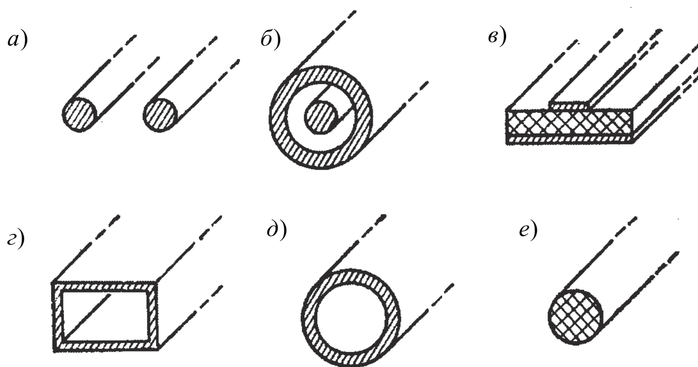


Рис. 1. Некоторые виды линий передачи

а – двухпроводная линия передачи (двухсвязная открытая линия передачи);

б – коаксиальный волновод (двухсвязный волновод с соосными внешним и внутренним проводниками);

в – микрополосковая линия передачи (двухсвязная открытая неоднородная линия передачи);

г – прямоугольный волновод (односвязный волновод, имеющий прямоугольное поперечное сечение);

д – круглый волновод (односвязный волновод, имеющий круглое поперечное сечение);

е – диэлектрическая линия передачи (открытая линия передачи нулевой связности).

1.3. Классификация электромагнитных волн, распространяющихся в линиях передачи

В зависимости от вида линий передачи в них могут распространяться электромагнитные волны четырех классов:

поперечные или Т-волны (старое название и обозначение – поперечно-электромагнитные или ТЕМ-волны);

электрические или Е-волны (старое название и обозначение – поперечно-магнитные или ТМ-волны);

магнитные или Н-волны (старое название и обозначение – поперечно-электрические или ТЕ-волны);

гибридные волны.

Разделение волн, распространяющихся вдоль линий передачи, на указанные классы производится относительно продольной (направленной вдоль линии передачи) пространственной координаты z. По отношения к этой координате в Т-волнах векторы $\overline{E}$ и $\overline{H}$ имеют только поперечные (перпендикулярные оси $0z$) составляющие; в Е-волнах вектор $\overline{E}$ имеет поперечную и продольную составляющие, а вектор $\overline{H}$ – только поперечную; в Н-волнах вектор $\overline{H}$ имеет поперечную и продольную составляющие, а вектор $\overline{E}$ – только поперечную; в гибридных волнах оба вектора ($\overline{E}$ и $\overline{H}$) имеют и продольные и поперечные составляющие. Заметим, что в линиях передачи ось $0z$ совпадает с направлением движения распространяющихся вдоль этих линий электромагнитных волн.

Т-волны могут существовать только в двухсвязных или многосвязных линиях передачи (причем как в открытых линиях, так и в волноводах).

Е- и Н-волны могут существовать в односвязных и многосвязных волноводах различного поперечного сечения.

Гибридные волны могут существовать в неоднородных линиях передачи различных типов.

2. МЕТОДЫ ИЗУЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ

Так как энергия от генератора переносится к нагрузке электромагнитной волной, распространяющейся вдоль линии, то наиболее общим методом изучения процессов в линиях передачи является метод электродинамики, основанный на решении волновых уравнений для векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$ с последующим определением передаваемой мощности как потока вектора Пойнтинга через поперечное сечение линии.

В то же время в линиях передачи с Т-волной, где понятия ток в проводниках линии и напряжение между ними имеют вполне конкретный физический смысл, наряду с методами электродинамики можно воспользоваться для описания протекающих в этих линиях электромагнитных процессов методами теории цепей с распределенными параметрами (теорией длинных линий), основанными на решении телеграфных уравнений для токов и напряжений с последующим определением передаваемой мощности как произведения тока и напряжения в нагрузке линии.

Оба эти метода для линий передачи с Т-волной приводят к одинаковым результатам. Однако метод теории цепей связан с использованием более простого математического аппарата и был первым исторически. Его и применяют в инженерной практике при расчете характеристик этих линий.

В линиях передачи с Е- и Н-волнами из-за наличия продольных составляющих векторов $\overline{\mathrm{E}}$ и $\overline{\mathrm{H}}$ понятие напряжения теряет свой физический смысл, поэтому описание протекающих в них электромагнитных процессов возможно только методами электродинамики. Эти методы и будут рассмотрены в настоящем пособии.

3. ОБЩИЕ СВОЙСТВА НАПРАВЛЯЕМЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

3.1. Постановка задачи и порядок ее решения

Постановка задачи и допущения. Пусть имеется бесконечно длинная однородная линия передачи. Предположим, что металлические части линии выполнены из идеального проводника ($\gamma_м = \infty$), а диэлектрические части и окружающая среда являются идеальными диэлектриками ($\gamma_д = 0$). Кроме того, будем считать что в рассматриваемой области отсутствуют сторонние токи и заряды.

Требуется определить электромагнитное поле, которое может существовать в данной линии передачи при условии, что это поле гармоническое во времени, а частота колебаний равна ω.

Предположение о виде решения. Поле в линии будем искать в виде суммы (суперпозиции) Е- и Н-волн, распространяющихся вдоль оси 0*z*, совпадающей с продольной осью рассматриваемой линии передачи (заметим, что Т-волны являются частным случаем Е- и Н-волн).

Решение. Искомое поле должно удовлетворять однородным уравнениям Максвелла в комплексной форме:

$$\mathrm{rot}\,\dot{\overline{\mathrm{H}}} = j\omega\dot{\varepsilon}_a\,\dot{\overline{\mathrm{E}}},$$

$$\mathrm{rot}\,\overline{\mathrm{E}} = -j\omega\,\mu_а\,\dot{\overline{\mathrm{H}}},$$

$$\mathrm{div}\,\dot{\overline{\mathrm{H}}} = 0,$$

$$\mathrm{div}\,\dot{\overline{\mathrm{E}}} = 0, \qquad (1)$$

и граничному условию для касательной составляющей вектора напряженности электрического поля ($\dot{E}_\tau$) на поверхностях идеальных проводников:

$$\dot{\mathrm{E}}_\tau = 0. \qquad (2)$$

Уравнения (1) легко трансформируются в однородные волновые уравнения для векторов $\dot{\bar{\mathrm{E}}}$ и $\dot{\bar{\mathrm{H}}}$:

$$\nabla^2 \dot{\bar{\mathrm{E}}} + k^2 \dot{\bar{\mathrm{E}}} = 0, \nabla^2 \dot{\bar{\mathrm{H}}} + k^2 \dot{\bar{\mathrm{H}}} = 0, \qquad (3)$$

где $k = \omega\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$ – волновое число для плоской однородной волны, распространяющейся в безграничной среде с параметрами диэлектрика, заполняющего (окружающего) линию передачи. В дальнейшем такую среду для краткости будем именовать «свободным пространством».

При решении задачи определения структуры электромагнитных полей Е- и Н-волн в линиях передачи используется следующий прием:

все поперечные составляющие векторов поля выражают с помощью так называемых «уравнений связи» через имеющиеся в данной волне продольные составляющие векторов напряженности электрического или магнитного поля ($\dot{\mathrm{E}}_z$ для Е-волн и $\dot{\mathrm{H}}_z$ для Н-волн);

решают волновые уравнения только для этих продольных составляющих;

вычисляют с помощью уравнений связи поперечные составляющие векторов $\dot{\bar{\mathrm{E}}}$ и $\dot{\bar{\mathrm{H}}}$ в линии передачи.

Таким образом, решение задачи сводится к составлению уравнений связи и решению одномерных однородных волновых уравнений для продольных составляющих векторов $\dot{\bar{\mathrm{E}}}$ или $\dot{\bar{\mathrm{H}}}$. Для Е-волн предстоит решить уравнение

$$\nabla^2 \dot{\mathrm{E}}_z + k^2 \dot{\mathrm{E}}_z = 0, \qquad (4)$$

а для Н-волн – уравнение

$$\nabla^2 \dot{\mathrm{H}}_z + k^2 \dot{\mathrm{H}}_z = 0. \qquad (5)$$

Постоянные коэффициенты, которые получаются при интегрировании этих уравнений, определяются при наложении на полученные решения граничного условия (2).

3.2. Уравнения связи для Е- и Н-волн

Уравнения связи получаются в результате преобразования уравнений Максвелла (1), раскрытых для соответствующей системы координат.

Для декартовой (прямоугольной) системы координат (x,y,z) уравнения связи для Е- и Н-волн выглядят следующим образом:

Е-волны

$$\dot{E}_x = (-j\,K/æ^2)\,\partial \dot{E}_z/\partial x,$$

$$\dot{E}_y = (-j\,K/æ^2)\,\partial \dot{E}_z/\partial y,$$

$$\dot{H}_x = (j\,\omega\varepsilon_a/æ^2)\,\partial \dot{E}_z/\partial y,$$

$$\dot{H}_y = (-j\,\omega\varepsilon_a/æ^2)\,\partial \dot{E}_z/\partial x, \qquad (6)$$

Н-волны

$$\dot{E}_x = (-j\,\omega\mu_a/æ^2)\,\partial \dot{H}_z/\partial y,$$

$$\dot{E}_y = (j\,\omega\mu_a/æ^2)\,\partial \dot{H}_z/\partial x,$$

$$\dot{H}_x = (-j\,K/æ^2)\,\partial \dot{H}_z/\partial x,$$

$$\dot{H}_y = (-j\,K/æ^2)\,\partial \dot{H}_z/\partial y, \qquad (7)$$

где K – волновое число для Е и Н-волн в волноводе.

Для цилиндрической системы координат (ρ,φ,z) уравнения связи для Е- и Н-волн выглядят следующим образом:

Е-волны

$$\dot{E}_\rho = (-j\,K/æ^2)\,\partial \dot{E}_z/\partial\rho,$$

$$\dot{E}_\varphi = (-j\,K/æ^2)\,(1/\rho)\,\partial \dot{E}_z/\partial\varphi,$$

$$\dot{H}_\rho = (j\,\omega\varepsilon_a/æ^2)\,(1/\rho)\,\partial \dot{E}_z/\partial\varphi,$$

$$\dot{H}_\varphi = (-j\,\omega\varepsilon_a/æ^2)\,\partial \dot{E}_z/\partial\rho, \qquad (8)$$

Н-волны

$$\dot{E}_\rho = (-j\,\omega\mu_a/æ^2)\,(1/\rho)\,\partial \dot{H}_z/\partial\varphi,$$

$$\dot{E}_\varphi = (j\,\omega\mu_a/æ^2)\,\partial \dot{H}_z/\partial\rho,$$

$$\dot{H}_\rho = (-j\,K/æ^2)\,\partial \dot{H}_z/\partial\rho,$$

$$\dot{H}_\varphi = (-j\,K/æ^2)\,(1/\rho)\,\partial \dot{H}_z/\partial\varphi. \qquad (9)$$

3.3. Решение волновых уравнений для продольных составляющих векторов напряженности электрического и магнитного поля Е- и Н-волн

Решение волновых уравнений будем искать в обобщенно-цилиндрической ортогональной системе координат (ξ,η,z), частными случаями которой являются декартова (прямоугольная) система координат (x,y,z) и цилиндрическая система координат (ρ,φ,z). Координатная линия $0z$ во всех этих системах представляет собой прямую, перпендикулярную плоскости, в которой расположены две другие координатные линии (эти линии для декартовой системы координат представляют собой две взаимно перпендикулярные прямые, а для цилиндрической системы координат – радиус-вектор и дугу окружности).

Так как волновые уравнения (4) и (5) абсолютно идентичны, то в настоящем подразделе мы будем интегрировать однородное волновое уравнение для скалярной функции $\dot{\Omega}(\xi,\eta,z)$, помня о том, что полученное решение в одинаковой мере удовлетворит уравнениям (4) и (5).

Ориентируем систему координат (ξ,η,z) таким образом, чтобы ось $0z$ совпала с продольной осью линии передачи, т.е. с направлением движения фазового фронта электромагнитной волны, распространяющейся вдоль данной линии (рис. 2). В этом случае оператор Лапласа ∇^2 (лапласиан) для функции $\dot{\Omega}(\xi,\eta,z)$ может быть представлен в следующем виде:

$$\nabla^2 = \nabla^2_{\perp}(\xi, \eta) + \partial^2/\partial z^2, \qquad (10)$$

где $\nabla^2_{\perp}(\xi, \eta)$ – оператор Лапласа по поперечным координатам (поперечный лапласиан).

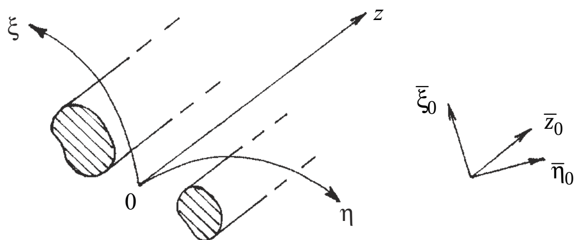


Рис. 2. Ориентировка обобщенно-цилиндрической системы координат относительно линии передачи

Для декартовой системы координат

$$\nabla^2_{\perp}(x,y) = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2. \qquad (11)$$

Для цилиндрической системы координат

$$\nabla^2_{\perp}(\rho,\varphi) = \partial^2/\partial\rho^2 + (1/\rho)\,(\partial/\partial\rho) + (1/\rho^2)\,(\partial^2/\partial\varphi^2). \quad (12)$$

При выбранной ориентации обобщенно-цилиндрической системы координат относительно линии передачи исходное волновое уравнение для функции $\dot{\Omega}(\xi,\eta,z)$ примет следующий вид:

$$\nabla^2_{\perp}\dot{\Omega}(\xi,\eta,z) + \partial^2\dot{\Omega}(\xi,\eta,z)/\partial z^2 + k^2\dot{\Omega}(\xi,\eta,z) = 0. \quad (13)$$

Решение этого уравнения будем искать методом разделения переменных (методом Фурье). В соответствии с идеей метода, искомую функцию $\dot{\Omega}(\xi,\eta,z)$ представим в виде произведения двух функций, одна из которых ($\Psi(\xi,\eta)$) зависит только от переменных ξ и η, а вторая ($\dot{Z}(z)$) – только от переменной z. В этом случае

$$\dot{\Omega}(\xi,\eta,z) = \Psi(\xi,\eta)\,\dot{Z}(z), \quad (14)$$

и уравнение (13) приобретает следующий вид:

$$\dot{Z}(z)\,\nabla^2_{\perp}\Psi(\xi,\eta) + \Psi(\xi,\eta)\,(\partial^2\dot{Z}(z)/\partial z^2) + k^2\,\Psi(\xi,\eta)\,\dot{Z}(z) = 0.$$

Поделив почленно обе части этого уравнения на произведение $\Psi(\xi,\eta)\,\dot{Z}(z)$ и перейдя во втором члене от частного дифференциала к полному (так как функция $\dot{Z}(z)$ зависит только от одной переменной), получим

$$(1/\Psi(\xi,\eta))\,\nabla^2_{\perp}\Psi(\xi,\eta) + (1/\dot{Z}(z))\,(\mathrm{d}^2\dot{Z}(z)/\mathrm{d}z^2) = -k^2. \quad (15)$$

В этом уравнении первый член зависит только от переменных ξ и η, второй – только от переменой z, а их сумма равна постоянной величине $-k^2$. Уравнение (15) должно быть справедливым при любом значении переменной z. Очевидно, что это требование может быть удовлетворено только в том случае, если и первый, и второй члены этого уравнения порознь равны неким постоянным величинам. Обозначим эти постоянные – $æ^2$ и – K^2 соответственно. Тогда уравнение (15) может быть представлено в виде системы из трех уравнений:

$$\mathrm{d}^2\dot{Z}(z)/\mathrm{d}z^2 + K^2\dot{Z}(z) = 0, \quad (16)$$

$$\nabla^2_{\perp}\Psi(\xi,\eta) + æ^2\,\Psi(\xi,\eta) = 0, \quad (17)$$

$$æ^2 + K^2 = k^2. \quad (18)$$

Метод Фурье позволил нам перейти от исходного трехмерного дифференциального уравнения в частных производных (13) к более простым уравнениям (16) и (17). Физический смысл, названия и способы определения постоянных коэффициентов K и æ будут выяснены позднее.

Займемся интегрированием уравнения (16). Оно представляет собой обыкновенное однородное дифференциальное уравнение второго порядка, решениями которого могут быть комбинации показательных либо тригонометрических функций и постоянных коэффициентов:

$$\dot{Z}(z) = A \exp(-jKz) + B \exp(jKz), \tag{19}$$

$$\dot{Z}(z) = C \cos(Kz) + D \sin(Kz), \tag{20}$$

где A, B, C, D – постоянные коэффициенты (постоянные интегрирования).

Первое решение представляет собой суперпозицию бегущих волн, распространяющихся навстречу друг другу вдоль оси $0z$, а второе – стоячую волну, установившуюся вдоль оси $0z$. Очевидно, что исходя из физических условий решаемой задачи, необходимо отбросить решение (20) и оставить только (19), так как вдоль линии передачи (вдоль оси $0z$) должны распространяться электромагнитные волны, переносящие энергию.

Сопоставляя (19) с решением для плоской однородной волны, приходим к выводу, что первое слагаемое в этом решении характеризует падающую волну, распространяющуюся вдоль линии передачи в положительном направлении оси $0z$, а второе – отраженную волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси $0z$. Соответственно величину K называют продольным волновым числом.

Если учесть, что по условиям решаемой задачи линия передачи является однородной и бесконечно длинной, то отраженная волна в ней должна отсутствовать, и выражение (14) приобретает следующий вид:

$$\dot{\Omega}(\xi,\eta,z) = \Psi(\xi,\eta)\, A \exp(-jKz). \tag{21}$$

Что касается уравнения (17), то его решение будет зависеть от формы поперечного сечения линии. Дело в том, что граничное условие (2) может быть использовано для определения постоянных интегрирования наиболее простым образом в том случае, когда координатные поверхности системы координат, в которой раскрыто уравнение (17), могут быть совмещены с проводящими поверхностями рассматриваемой линии передачи. Поэтому, отложив решение уравнения (17) до рассмотре-

ния конкретных типов линий передачи, отметим лишь, что функция $\Psi(\xi,\eta)$ определяет зависимость продольных составляющих векторов $\overline{\text{E}}$ и $\overline{\text{H}}$ от поперечных пространственных переменных. Соответственно величину æ называют поперечным волновым числом.

Опираясь на решение (21), можно записать выражения для функций $\dot{\text{E}}_z(\xi,\eta,z)$ и $\dot{\text{H}}_z(\xi,\eta,z)$, которые являются решениями уравнений (4) и (5):

$$\dot{\text{E}}_z(\xi,\eta,z) = \text{E}(\xi,\eta)\, A^{\text{E}} \exp(-jKz), \quad (22)$$

$$\dot{\text{H}}_z(\xi,\eta,z) = \text{H}(\xi,\eta)\, A^{\text{H}} \exp(-jKz), \quad (23)$$

где $\text{E}(\xi,\eta)$, $\text{H}(\xi,\eta)$ – функции от поперечных пространственных переменных, которые предстоит найти в результате решения уравнения (17).

Результаты исследований, проведенных в настоящем подразделе, позволяют сделать следующие выводы:

зависимость составляющих векторов $\overline{\text{E}}$ и $\overline{\text{H}}$ направляемых волн от продольной пространственной переменной z одинакова для линий передачи любых конструкций и определяется функцией $Z(z) = A\exp(-jKz)$, где A – амплитудный коэффициент, K – продольное волновое число;

зависимости составляющих векторов $\overline{\text{E}}$ и $\overline{\text{H}}$ направляемых волн от поперечных пространственных переменных для линий передачи различных конструкций отличаются друг от друга; вид этих зависимостей может быть найден путем интегрирования дифференциального уравнения (17), раскрытого в такой системе координат (являющейся частным случаем обобщенно-цилиндрической системы), координатные поверхности которой могут быть совмещены с проводящими поверхностями рассматриваемой линии передачи;

постоянные коэффициенты, получаемые при интегрировании уравнения (17), должны быть найдены с использованием граничного условия (2), трансформированного для рассматриваемой линии передачи.

3.4. Особенности распространение направляемых электромагнитных волн

Выше было установлено, что зависимость векторов $\overline{\text{E}}$ и $\overline{\text{H}}$ любых направляемых волн от продольной пространственной координаты z определяется множителем $\exp(-jKz)$, где в соответствии с формулой (18)

$$K = \pm\, (k^2 - æ^{2)\ 0.5}. \quad (24)$$

Следовательно, для всех направляемых волн можно установить некоторые общие закономерности их распространения.

Т-волны. Для Т-волн поперечное волновое число æ = 0, а продольное волновое число $K = k$. Это означает, что в линиях передачи без потерь Т-волны распространяются без затухания и с той же фазовой скоростью V, что и в свободном пространстве:

$$V = \omega / k = 1 / \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} \ . \qquad (25)$$

Длина волны Т-волн в линиях передачи также равна длине волны в свободном пространстве:

$$\lambda = 2\pi / k = V / f. \qquad (26)$$

Важно отметить, что линия, по которой распространяется только Т-волна, представляет собой недиспергирующую систему.

Е- и Н-волны. Для этих волн поперечное волновое число æ ≠ 0, а продольное волновое число K отличается от k. Рассмотрим, как будет изменяться величина K в зависимости от частоты колебаний ω. В реальных системах частота ω есть частота источника, возбуждающего поле, т.е. частота генератора. Положим в общем виде

$$K = \beta - j\alpha, \ \ j K = \alpha + j\beta. \qquad (27)$$

В зависимости от величины ω могут иметь место три случая (напомним, что $k = \omega\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$).

Волновое число k > æ (частота ω достаточно высокая). При этом продольное волновое число K является чисто вещественной величиной (см.(24)). Следовательно, в данном случае (см. (27)) $K = \beta$, $\alpha = 0$. Волна распространяется вдоль линии без затухания и процесс ее распространения определяется множителем $\exp(-j\beta z)$, где β играет роль коэффициента фазы этой волны:

$$\beta = (k^2 - æ^2)^{0.5} = (\omega^2 \, \varepsilon_a \, \mu_a - æ^2)^{0.5}. \qquad (28)$$

Волновое число k < æ (частота ω низкая). При этом продольное волновое число K является чисто мнимой величиной (см. (24)) и, в соответствии с (27), $K = -j\alpha$, $\beta = 0$. Это означает, что в данном случае в линии передачи существует не электромагнитная волна, а нераспространяющееся электромагнитное поле, «привязанное» к источнику возбуждения и затухающее по мере удаления от него по закону $\exp(-\alpha z)$, где α – коэффициент затухания, равный

$$\alpha = (æ^2 - k^{2)\ 0.5} = (æ^2 - \omega^2 \, \varepsilon_a \, \mu_a)^{0.5}. \qquad (29)$$

Необходимо отметить, что для нераспространяющегося поля уменьшение амплитуд векторов $\dot{\bar{E}}$ и $\dot{\bar{H}}$ по мере удаления от источника возбуждения не связано с потерями энергии электромагнитного поля за счет перехода ее в другие формы, а является особенностью структуры поля данного типа.

Фазы векторов $\dot{\bar{E}}$ и $\dot{\bar{H}}$ нераспространяющегося поля во всех точках линии передачи имеют одинаковое значение и не зависят от расстояния до источника возбуждения.

Волновое число $k = æ$. При этом продольное волновое число $K = 0$. Формально в этом случае в линии передачи нет ни волны, ни нераспространяющегося поля. Такой режим работы линии передачи называют критическим, а частоту, при которой наступает этот режим, также называют критической и обозначают $\omega_{кр}$. Она определяет границу перехода от режима, при котором в линии передачи могут распространяться электромагнитные волны, к режиму, при котором распространение электромагнитных волн вдоль линии передачи невозможно.

Из выражения (24), полагая $K = 0$, находим

$$\omega_{кр} = æ\, V = æ / \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}\ , \qquad (30)$$

$$f_{кр} = \omega_{кр} / 2\pi = æ\, V / 2\pi = æ / (2\pi \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}\ ), \qquad (31)$$

где V – фазовая скорость плоской электромагниной волны, распространяющейся в свободном пространстве.

Из формул (30), (31) видно, что критическая частота зависит не только от поперечного волнового числа æ, но и от параметров диэлектрика, заполняющего линию передачи. Такая зависимость иногда оказывается неудобной, поэтому помимо $\omega_{кр}$ и $f_{кр}$ для характеристики критического режима пользуются параметром «критическая длина волны» – $\lambda_{кр}$, под которой понимают длину волны плоской однородной волны, распространяющейся в свободном пространстве, частота возбуждения которой равна $f_{кр}$:

$$\lambda_{кр} = V / f_{кр} = 2\pi / æ. \qquad (32)$$

Таким образом, в отличие от Т-волн, Е- и Н-волны могут распространяться вдоль линии передачи не при любых частотах, а лишь при выполнении условия

$$f > f_{кр} \text{ или } \lambda < \lambda_{кр}, \qquad (33)$$

где f – частота возбуждающего линию передачи генератора, а λ – длина волны в свободном пространстве, соответствующая этой частоте.

Найдем фазовую и групповую скорости Е- и Н-волн, распространяющихся вдоль линии передачи – $V_{ф}$ и $V_{гр}$.

Для этого запишем мгновенное значение функции $\dot{Z}(z)$ для падающей волны – $Z(z,t)$ (см. выражения (19) и (21)):

$$Z(z,t) = \text{R}\varepsilon\{\dot{Z}(z)\exp(j\omega t)\} = A\cos(\omega t - \beta z).$$

Приравняв аргумент косинуса этого выражения постоянной величине, получим

$$z = (\omega t - \text{const}) / \beta.$$

Фазовая скорость будет равна производной по времени от полученной величины z

$$V_{ф} = \partial z / \partial t = \omega / \beta, \qquad (34)$$

где β определяется выражением (28).

Продолжая преобразования, найдем

$$V_{ф} = \omega / (k^2 - æ^2)^{0.5} = (\omega / k) / (1 - æ^2 / k^2)^{0.5} =$$
$$= V / ((1 - (\lambda / \lambda_{кр})^2)^{0.5} = V / ((1 - (f_{кр} / f)^2)^{0.5}. \qquad (35)$$

Анализ выражения (35) показывает, что, во-первых, $V_{ф}$ зависит от частоты генератора и, следовательно, линии передачи с Е- и Н-волнами являются диспергирующими системами. Во-вторых, $V_{ф}$ оказывается больше, чем фазовая скорость плоской однородной волны в свободном пространстве V. Этот результат, на первый взгляд, может показаться противоречащим основному постулату теории относительности, согласно которому передача сигналов со скоростью, превышающей скорость света в пустоте, невозможна. На самом деле противоречия, конечно, нет, так как скорость передачи сигнала электромагнитной волной, равная $1/(\partial\beta/\partial\omega)$, совпадает с фазовой скоростью этой волны и скоростью переноса энергии только для плоской однородной волны, распространяющейся в свободном пространстве. Для Е- и Н-волн скорость передачи сигнала, которую мы назовем групповой скоростью и обозначим $V_{гр}$, отличается от $V_{ф}$ и равна:

$$V_{гр} = 1 / (\partial\beta / \partial\omega) = 1 / (\partial((\omega^2 \varepsilon_a \mu_a - æ^2)^{0.5}) / \partial\omega) =$$
$$= V(1 - (\lambda / \lambda_{кр})^2)^{0.5} = V(1 - (f_{кр} / f)^2)^{0.5}. \qquad (36)$$

Как и следовало ожидать, $V_{гр}$ оказывается меньше, чем V. Примечательно, что всегда выполняется условие

$$V_{гр}\ V_{ф} = V^2.$$

Найдем длину волны Е- и Н-волн, распространяющихся вдоль линии передачи.

Фазовая скорость $V_{ф}$ определяет длину волны в линии передачи, которую мы обозначим Λ и будем понимать под ней расстояние, которое Е- или Н-волна проходит вдоль линии за отрезок времени, равный периоду колебаний T:

$$\Lambda = V_{ф}\ T. \qquad (37)$$

Подставляя в (37) значение $V_{ф}$ из (35), и учитывая, что $T = \lambda\ /\ V$, получаем

$$\Lambda = \lambda\ /\ (1 - (\lambda\ /\ \lambda_{кр})^2)^{0.5} = \lambda\ /\ (1 - (f_{кр}\ /\ f)^2)^{0.5}, \qquad (38)$$

где λ – длина волны в свободном пространстве, соответствующая частоте генератора, возбуждающего Е- и Н-волны в линии передачи.

Как и следовало ожидать, при одной и той же частоте возбуждения длина волны в линии передачи Λ оказывается больше длины волны в свободном пространстве λ.

Из формул (38) и (35) следует, что с увеличением частоты возбуждающего генератора длины волн электрических и магнитных волн в линии передачи и их фазовые скорости приближаются к длине волны и фазовой скорости плоской волны в свободном пространстве. Этот результат можно объяснить тем, что, по мере увеличения частоты, относительные (по отношению к λ) размеры поперечного сечения линии передачи возрастают и условия распространения волн вдоль линии передачи все больше приближаются к условиям, существующим при распространении волны в свободном пространстве.

Наоборот, при стремлении f к $f_{кр}$ значения Λ и $V_{ф}$ все больше превосходят λ и V, стремясь в пределе (при $f = f_{кр}$) к бесконечности.

Установив общие свойства направляемых волн, перейдем к рассмотрению структуры электромагнитного поля этих волн для конкретных направляющих систем.

4. СТРУКТУРА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ Е- И Н-ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

Прямоугольным волноводом называют односвязный металлический волновод, поперечное сечение которого имеет форму прямоугольника. Стандартные прямоугольные волноводы представляют собой латунные или дюралевые трубы прямоугольного поперечного сечения, линейные размеры которого соответствуют гостированным числовым рядам. Волноводы позволяют передавать большие мощности при малых потерях. Однако передача электромагнитной энергии по полой трубе возможна лишь тогда, когда линейные размеры ее поперечного сечения соизмеримы с длиной волны или превосходят ее. Поэтому приемлемыми для практики габаритами (соответственно весом и стоимостью) обладают металлические волноводы для волн, длина которых в свободном пространстве не превышает 20–25 см.

4.1. Система уравнений для Е-волн в прямоугольном волноводе

В подразд. 3.3 было показано, что для определения законов изменения продольной составляющей $\dot{E}_z$ в поперечной плоскости линии передачи необходимо проинтегрировать дифференциальное уравнение (17). При выборе системы координат, в которой будет раскрыт поперечный лапласиан $\nabla^2{}_\perp$, необходимо придерживаться следующего правила: координатные поверхности выбираемой системы должны совпадать по форме с граничными поверхностями рассматриваемой линии передачи. Выполнение этого правила позволяет использовать граничные условия для касательных составляющих вектора $\bar{\bar{E}}$ при определении постоянных интегрирования. Очевидно, что для прямоугольного волновода этому правилу удовлетворяет прямоугольная (декартова) система координат, так как ее координатными поверхностями являются взаимно перпендикулярные плоскости, которые можно совместить с граничными поверхностями (стенками) прямоугольного волновода.

Разместим прямоугольную систему координат так, как показано на рис. 3. В этом случае верхняя и нижняя стенки волновода находятся в плоскостях $y = 0$ и $y = b$, а боковые – в плоскостях $x = 0$ и $x = a$. Уравнение (17) в декартовой системе координат имеет следующий вид:

$$\partial^2\Psi(x,y)\,/\partial x^2 + \partial^2\Psi(x,y)\,/\partial y^2 + æ^2\Psi(x,y) = 0. \qquad (39)$$

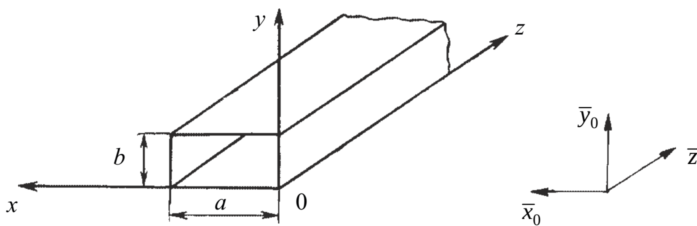


Рис. 3. Система координат прямоугольного волновода

При интегрировании уравнения (39) воспользуемся уже знакомым нам методом Фурье. Представим функцию $\Psi(x,y)$ в виде произведения двух функций $X(x)$ и $Y(y)$, каждая из которых зависит только от одной пространственной переменой:

$$\Psi(x,y) = X(x)\ Y(y). \tag{40}$$

Подставим (40) в (39) и выполним частное дифференцирование

$$Y(y)\ \partial^2 X(x)/\partial x^2 + X(x)\partial^2 Y(y)/\partial y^2 + æ^2\, X(x)Y(y) = 0. \tag{41}$$

Перейдя в (41) от частных дифференциалов к обыкновенным и поделив его почленно на произведение $X(x)\ Y(y)$, имеем

$$(1/X(x))\ \mathrm{d}^2X(x)/\mathrm{d}\,x^2 + (1/Y(y))\ \mathrm{d}^2Y(y)/\mathrm{d}\,y^2 = -æ^2. \tag{42}$$

Используя те же доводы, что и при анализе уравнения (15), приравняем первый член уравнения (42) постоянному коэффициенту $-\ k_x^{\ 2}$, а второй – постоянному коэффициенту $-\ k_y^{\ 2}$, физический смысл которых будет выяснен позднее. В этом случае уравнение (42) может быть представлено в виде системы из трех более простых уравнений:

$$\mathrm{d}^2X(x)/\mathrm{d}\,x^2 + k_x^{\ 2}X(x) = 0, \tag{43}$$

$$\mathrm{d}^2Y(y)/\mathrm{d}\,y^2 + k_y^{\ 2}Y(y) = 0, \tag{44}$$

$$k_x^{\ 2} + k_y^{\ 2} = æ^2. \tag{45}$$

Уравнения (43) и (44) являются уже знакомыми нам обыкновенными однородными дифференциальными уравнениями второго порядка, решениями которых являются комбинации показательных либо тригонометрических функций и постоянных коэффициентов (см. (16), (19), (20)). Однако, в отличие от уравнения (16), когда по физическим соображениям мы выбрали для него решение (19), представляющее собой суперпозицию бегущих волн, в данном случае следует выбрать решения, представляющие собой стоячие волны, а решения в виде бегущих волн от-

бросить как физически не реализуемые, так как распространению бегущих волн в направлениях осей $0x$ и $0y$ препятствуют металлические стенки волновода. Таким образом, решение уравнения (43) для рассматриваемого случая будет иметь следующий вид:

$$X(x) = C\cos(k_x x) + D\sin(k_x x). \quad (46)$$

В выражение (46) входят три постоянные коэффициента C, D и k_x, для определения которых необходимо воспользоваться граничным условием (2).

Граничное условие (2) для выбранного расположения декартовой системы координат относительно стенок волновода (см. рис. 3) трансформируется в следующие условия для составляющей $\dot{E}_z$: $\dot{E}_z = 0$ при $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ и $y = b$. Применительно к уравнению (46) это означает, что при $x = 0$ и при $x = a$ правая часть уравнения должна обращаться в нуль. Первое условие может быть выполнено только в том случае, если $C = 0$, а второе – если $k_x = m\pi/a$, где m – любое целое положительное число; a – поперечный размер широкой стенки волновода. Таким образом, используя граничные условия, мы определили значения постоянных коэффициентов C и k_x, и уравнение (46) принимает следующий вид:

$$X(x) = D\sin(k_x x) = D\sin((m\pi/a)x). \quad (47)$$

Проведя аналогичные операции с уравнением (44), получаем

$$Y(y) = B\sin((k_y y) = B\sin((n\pi/b)y), \quad (48)$$

где B – постоянный коэффициент, $k_y = n\pi/b$ – постоянный коэффициент, n – любое целое положительное число, b – поперечный размер узкой стенки волновода.

Подставив (47) и (48) в (40), имеем

$$\Psi(x,y) = B\,D\sin((m\pi/a)x)\sin((n\pi/b)y). \quad (49)$$

Численные значения коэффициентов B и D зависят от параметров источника, возбуждающего электромагнитную волну в линии передачи. Подставив (49) в (22) и обозначив произведение коэффициентов B, D и A как E_0, получим окончательное решение волнового уравнения для продольной составляющей $\dot{E}_z$ вектора напряженности электрического поля E-волн в прямоугольном волноводе

$$\dot{E}_z(x,y,z) = E_0\sin((m\pi/a)x)\sin((n\pi/b)y)\exp(-jKz). \quad (50)$$

Чтобы воспользоваться уравнениями связи (6) для определения поперечных составляющих векторов напряженности электрического и маг-

нитного полей Е-волн в прямоугольном волноводе, необходимо найти частные производные $\partial \dot{E}_z / \partial x$ и $\partial \dot{E}_z / \partial y$. Вычислим их, проведя частное дифференцирование выражения (50) по переменным x и y:

$$\partial \dot{E}_z / \partial x = (m\pi/a)\, E_0 \cos((m\pi/a)x) \sin((n\pi/b)y) \exp(-jKz).$$

$$\partial \dot{E}_z / \partial y = (n\pi/b)\, E_0 \sin((m\pi/a)x) \cos((n\pi/b)y) \exp(-jKz).$$

Анализ уравнения (50) и его частных производных показывает, что для Е-волн целые числа m и n, входящие в выражения для коэффициентов k_x и k_y, не должны равняться нулю, так как в противном случае все составляющие векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ этих волн будут равняться нулю.

Подставляя значения вычисленных частных производных в уравнения (6), получим систему уравнений для составляющих векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ поперечно-магнитных волн (Е-волн) в прямоугольном волноводе:

$$\dot{E}_x = (-j\, K / æ^2)\, (m\pi/a)\, E_0 \cos((m\pi/a)x) \sin((n\pi/b)y) \exp(-jKz),$$

$$\dot{E}_y = (-j\, K / æ^2)\, (n\pi/b)\, E_0 \sin((m\pi/a)x) \cos((n\pi/b)y) \exp(-jKz),$$

$$\dot{E}_z = E_0 \sin((m\pi/a)x) \sin((n\pi/b)y) \exp(-jKz),$$

$$\dot{H}_x = (j\, \omega\varepsilon_a / æ^2)\, (n\pi/b)\, E_0 \sin((m\pi/a)x) \cos((n\pi/b)y) \exp(-jKz),$$

$$\dot{H}_y = (-j\, \omega\varepsilon_a / æ^2)\, (m\pi/a)\, E_0 \cos((m\pi/a)x) \sin((n\pi/b)y) \exp(-jKz),$$

$$\dot{H}_z = 0. \qquad (51)$$

Уравнения (51) могут быть записаны в более компактном виде:

$$\dot{E}_x = -j\, E_{0x} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \exp(-jKz) = -j\, E_x(x,y) \exp(-jKz),$$

$$\dot{E}_y = -j\, E_{0y} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \exp(-jKz) = -j\, E_y(x,y) \exp(-jKz),$$

$$\dot{E}_z = E_{0z} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \exp(-jKz) = E_z(x,y) \exp(-jKz),$$

$$\dot{H}_x = j\, H_{0x} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \exp(-jKz) = j\, H_x(x,y) \exp(-jKz),$$

$$\dot{H}_y = -j\, H_{0y} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \exp(-jKz) = -j\, H_y(x,y) \exp(-jKz),$$

$$\dot{H}_z = 0, \qquad (52)$$

где $E_x(x,y)$, $E_y(x,y)$, $E_z(x,y)$, $H_x(x,y)$, $H_y(x,y)$ – амплитуды соответствующих составляющих векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$, а E_{0x}, E_{0y}, E_{0z}, H_{0x}, H_{0y} – максимальные значения этих амплитуд.

Полезно отметить, что в случае Е-волн, являющихся неоднородными плоскими волнами, амплитуды составляющих векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ изменяются при перемещении вдоль фазового фронта этих волн (в отличие от однородных плоских волн, распространяющихся в свободном пространстве).

4.2. Система уравнений для Н-волн в прямоугольном волноводе

Отличие решения уравнения (17) для Н-волн от решения для Е-волн заключается в применении граничных условий. Дело в том, что уравнение (2), которое в случае Е-волн непосредственно трансформируется в граничные условия для составляющей E_z, в данном случае (т.е. применительно к продольной составляющей вектора напряженности магнитного поля) может быть использовано лишь опосредованно с помощью системы уравнений связи (7). Причем граничные условия могут быть получены не непосредственно для составляющей $\dot{H}_z$, а лишь для ее частных производных $\partial \dot{H}_z / \partial y$ и $\partial \dot{H}_z / \partial x$ (см. первые два уравнения системы (7)). Так как $\dot{E}_x$ является касательной составляющей при $y = 0$ и при $y = b$, а $\dot{E}_y$ является касательной составляющей при $x = 0$ и при $x = a$, то окончательно получаем

$$\partial \dot{H}_z / \partial y = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и при } y = b,$$

$$\partial \dot{H}_z / \partial x = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и при } x = a.$$

Используя эти граничные условия при решении уравнения (17) находим выражение для составляющей $\dot{H}_z$ магнитных волн (Н-волн) в прямоугольном волноводе $\dot{H}_z$

$$\dot{H}_z(x,y,z) = H_0 \cos((m\pi/a)x) \cos((n\pi/b)y) \exp(-jKz). \quad (53)$$

Анализ уравнения (53) показывает, что, в отличие от уравнения (50), в данном случае целые числа m и n порознь могут равняться нулю.

Найдя частные производные $\partial \dot{H}_z / \partial y$ и $\partial \dot{H}_z / \partial x$ и подставляя полученные значения в уравнения связи (8), получаем систему уравнений для векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ магнитных волн (Н-волн) в прямоугольном волноводе:

$$\dot{E}_x = (j\,\omega\mu_a / æ^2)\,(n\pi/b)\,H_0 \cos((m\pi/a)x) \sin((n\pi/b)y) \exp(-jKz),$$

$$\dot{E}_y = (-j\,\omega\mu_a / æ^2)\,(m\pi/a)\,H_0 \sin((m\pi/a)x)\cos((n\pi/b)y)\exp(-jKz),$$

$$\dot{E}_z = 0,$$

$$\dot{H}_x = (j\,K / æ^2)\,(m\pi/a)\,H_0 \sin((m\pi/a)x)\cos((n\pi/b)y)\exp(-jKz),$$

$$\dot{H}_y = (j\,K / æ^2)\,(n\pi/b)\,H_0 \cos((m\pi/a)x)\sin((n\pi/b)y)\exp(-jKz),$$

$$\dot{H}_z = H_0 \cos((m\pi/a)x)\cos((n\pi/b)y)\exp(-jKz). \qquad (54)$$

Уравнения (54) могут быть записаны в более компактном виде:

$$\dot{E}_x = j\,E_{0x}\cos(k_x x)\sin(k_y y)\exp(-jKz) = j\,E_x(x,y)\exp(-jKz),$$

$$\dot{E}_y = -j\,E_{0y}\sin(k_x x)\cos(k_y y)\exp(-jKz) = -j\,E_y(x,y)\exp(-jKz),$$

$$\dot{E}_z = 0,$$

$$\dot{H}_x = j\,H_{0x}\sin(k_x x)\cos(k_y y)\exp(-jKz) = j\,H_x(x,y)\exp(-jKz),$$

$$\dot{H}_y = j\,H_{0y}\cos(k_x x)\sin(k_y y)\exp(-jKz) = j\,H_y(x,y)\exp(-jKz),$$

$$\dot{H}_z = H_{0z}\cos(k_x x)\cos(k_y y)\exp(-jKz) = H_z(x,y)\exp(-jKz). \qquad (55)$$

4.3. Анализ решений уравнений Максвелла для прямоугольного волновода

Полученные выше системы уравнений ((51), (52)) и ((54), (55)) являются решениями уравнений Максвелла, удовлетворяющих физическим условиям рассматриваемой задачи и граничным условиям. Следовательно, в соответствии с теоремой единственности, эти решения однозначно описывают законы изменения в пространстве (а если вспомнить связь гармонических векторов с их комплексными амплитудами – то и во времени) векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$ внутри волновода. Попробуем на основе этих математических выкладок описать физическую картину электромагнитных процессов, происходящих внутри волновода.

Прежде всего запишем развернутую формулу для критической длины волны Е- и Н-волн (см. (32),(45),(47) и (48)).

$$\lambda_{кр} = 2\pi / æ = 2\pi / (k_x^{\,2} + k_y^{\,2})^{0.5} = 2 / ((m/a)^2 + (n/b)^2)^{0.5}, \qquad (56)$$

где m и n – целые положительные числа, которые для Н-волн могут порознь равняться нулю, а для Е-волн начинаются с единицы.

Каждой паре целых чисел m и n соответствуют разные значения векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$, а также разные значения $\lambda_{кр}$, $V_ф$ и Λ. Физически это озна-

чает, что при выполнении определенных условий в волноводе могут одновременно существовать различные по своей структуре и фазовой скорости Е- и Н-волны. Эти волны носят название «собственных волн» волновода и обозначаются E_{mn} или H_{mn}, где латинские заглавные буквы определяют принадлежность собственной волны к классу Е- или Н-волн, а нижние индексы *m* и *n* определяют тип собственной волны (т.е. структуру электрического и магнитного полей этой волны).

Характеристическое сопротивление Е *и* Н-*волн в прямоугольном волноводе (* $\dot{Z}_0^{E}$, $\dot{Z}_0^{H}$ *).* Характеристическое сопротивление собственных волн равно отношению взаимно перпендикулярных поперечных составляющих векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$ этих волн. Обратившись к системе уравнений для Е-волн (51), находим

$$\dot{Z}_0^{E} = \dot{E}_x / \dot{H}_y = -\dot{E}_y / \dot{H}_x = K/\omega\varepsilon_a = \sqrt{\mu_a / \varepsilon_a}\ (1 - (\lambda / \lambda_{кр})^2)^{0.5} =$$

$$= \dot{Z}_0\ (1 - (\lambda / \lambda_{кр})^2)^{0.5}, \qquad (57)$$

где $\dot{Z}_0$ – характеристическое сопротивление плоской однородной волны в свободном пространстве.

Обратившись к системе уравнений для Н-волн (54), находим

$$\dot{Z}_0^{H} = \dot{E}_x / \dot{H}_y = -\dot{E}_y / \dot{H}_x = \omega\mu_a / K = \sqrt{\mu_a / \varepsilon_a}\ / (1 - (\lambda / \lambda_{кр})^2)^{0.5} =$$

$$= \dot{Z}_0\ / (1 - (\lambda / \lambda_{кр})^2)^{0.5}. \qquad (58)$$

Как следует из выражений (57) и (58), характеристические сопротивления собственных волн волновода, в отличие от $\dot{Z}_0$, изменяются при изменении частоты возбуждающего генератора.

Волна основного типа в прямоугольном волноводе. Собственные волны могут распространяться по волноводу не при любых частотах, а лишь при соблюдении условия (33). Следовательно, возможно такое соотношение между поперечными размерами волновода и частотой возбуждающего генератора, при котором в волноводе будут одновременно распространяться несколько собственных волн (теоретически – любое количество).

В то же время, возможно такое соотношение между названными выше параметрами, при котором в волноводе не сможет распространяться ни одна из собственных волн.

И, наконец, можно выдержать такое соотношение между размерами волновода и частотой возбуждающего генератора, при котором в волноводе может распространяться только одна собственная волна, имеющая наибольшую из всех собственных волн критическую длину волны.

Эта собственная волна называется «основной волной волновода» или «волной низшего типа».

Для стандартного прямоугольного волновода, у которого $a > b$, волной основного типа будет собственная волна $H_{10.}$ Критическая длина волны для собственной волны H_{10} равна $2a$ (см. (56)). По отношению к волне H_{10} все прочие собственные волны называются волнами высших типов.

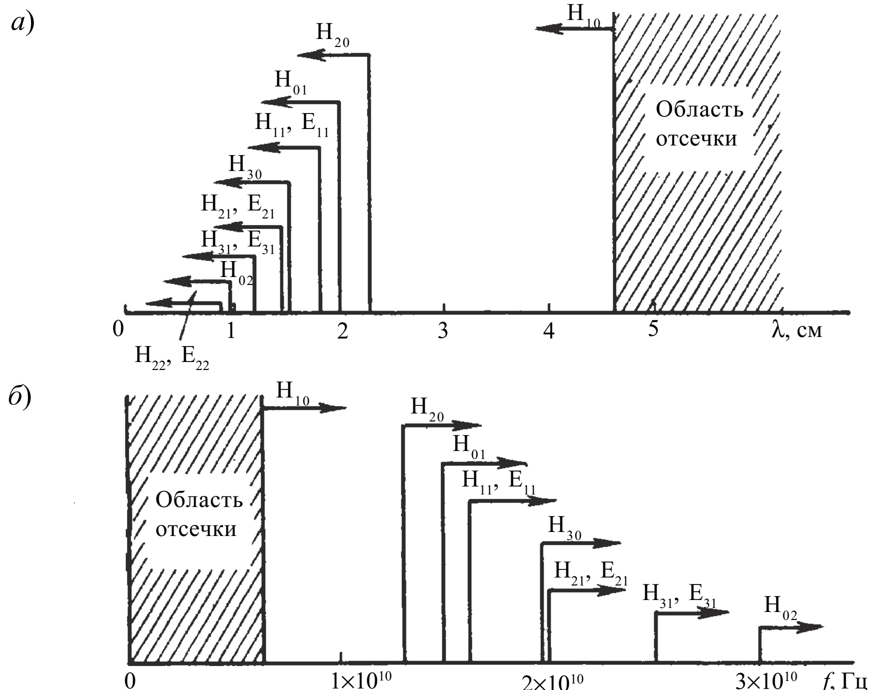


Рис. 4. Критические длины волн (*а*) и критические частоты (*б*) собственных волн прямоугольного волновода, имеющего поперечные размеры 23х10 мм

На рис.4 показано соотношение между критическими длинами волн и критическими частотами нескольких собственных волн прямоугольного волновода, имеющего поперечные размеры 23х10 мм. Этот рисунок наглядно демонстрирует наличие такого диапазона частот возбуждающего данный волновод генератора, в пределах которого волна H_{10} является единственно возможной собственной волной данного волновода, так как только для нее выполняется условие $\lambda < \lambda_{кр}$. На практике,

при разработке различных волноводных узлов и блоков, очень часто оказывается необходимым создать в волноводе именно такой режим работы. Поэтому рассмотрим структуру поля и особенности распространения собственной волны H_{10} более подробно.

4.4. Структура поля волны H_{10} в прямоугольном волноводе

Для волны H_{10} $m = 1$, $n = 0$, следовательно, $k_x = \pi/a$, $k_y = 0$, $\lambda_{кр} = 2a$, а система уравнений (55) преобразуется к следующему виду:

$$\dot{E}_x = 0,$$

$$\dot{E}_y = -j\, E_{0y} \sin((\pi/a)x) \exp(-jKz) = -j\, E_y(x) \exp(-jKz),$$

$$\dot{E}_z = 0,$$

$$\dot{H}_x = j\, H_{0x} \sin((\pi/a)x) \exp(-jKz) = j\, H_x(x) \exp(-jKz),$$

$$\dot{H}_y = 0,$$

$$\dot{H}_z = H_{0z} \cos((\pi/a)x) \exp(-jKz) = H_z(x) \exp(-jKz). \qquad (59)$$

Анализ уравнений (59) показывает, что вектор $\overline{E}$ волны H_{10} имеет только одну составляющую $\dot{E}_y$, расположенную в плоскости поперечного сечения волновода, а вектор $\overline{H}$ – две составляющие: $\dot{H}_x$, расположенную в плоскости поперечного сечения волновода, и $\dot{H}_z$, параллельную продольной оси симметрии волновода. В отличие от плоских однородных поперечных волн, у которых амплитуды векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$ не меняются в плоскости их фазового фронта, амплитуды составляющих $\dot{E}_y$, $\dot{H}_x$ и $\dot{H}_z$ векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$ волны H_{10} изменяются в плоскости фазового фронта этой волны. Амплитуды составляющих $\dot{E}_y$ и $\dot{H}_x$ имеют максимальные значения (E_{0y} и H_{0x}) в центре волновода и спадают до нуля около его боковых стенок, а амплитуда составляющей $\dot{H}_z$ имеет максимум (H_{0z}) около боковых стенок и спадает до нуля в центре волновода. Фазовые соотношения между этими составляющими таковы, что по отношению к $\dot{E}_y$ составляющая $\dot{H}_x$ сдвинута в пространстве и во времени на π (т.е. находится по отношению к ней в противофазе), а составляющая $\dot{H}_z$ – на $\pi/2$ (т.е. находится по отношению к ней в квадратуре). *С*оответственно, составляющие $\dot{H}_x$ и $\dot{H}_z$ сдвинуты по фазе друг относительно друга на $\pi/2$.

Формулы для гармонических векторов $\overline{E}$ (x,z,t) и $\overline{H}$ (x,z,t) волны H_{10} имеют следующий вид:

$$\overline{E}(x,z,t) = -\overline{y}_0 E_y(x,z,t) = -\overline{y}_0 E_y(x) \sin(\omega t - Kz), \tag{60}$$

$$\overline{H}(x,z,t) = \overline{x}_0 H_x(x,z,t) + \overline{z}_0 H_z(x,z,t) =$$

$$= \overline{x}_0 H_x(x) \sin(\omega t - Kz) + \overline{z}_0 H_z(x) \cos(\omega t - Kz), \tag{61}$$

где $E_y(x)$, $H_x(x)$, $H_z(x)$ – амплитуды составляющих $E_y(x,z,t)$, $H_x(x,z,t)$ и $H_z(x,z,t)$.

Амплитуды $E_y(x)$, $H_x(x)$, $H_z(x)$ имеют максимальные значения E_{0y}, H_{0x}, H_{0z}, а их зависимость от пространственной переменной x описывается следующими выражениями (см.(56)):

$$E_y(x) = E_{0y} \sin((\pi/a)x); \tag{62}$$

$$H_x(x) = H_{0x} \sin((\pi/a)x); \tag{63}$$

$$H_z(x) = H_{0z} \cos((\pi/a)x). \tag{64}$$

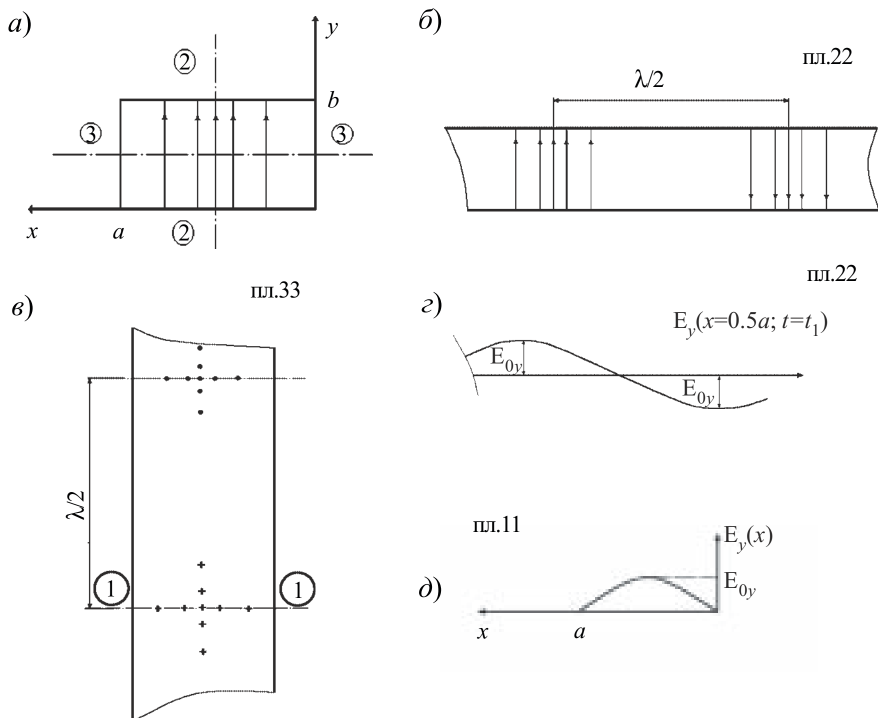


Рис. 5. Структура электрического поля волны H_{10} в прямоугольном волноводе

На рис. 5, *а*, *б*, *в* приведены графические изображения силовых линий вектора $\overline{\text{E}}$ волны H_{10} в плоскости поперечного сечения волновода (пл.11) и в двух взаимно перпендикулярных продольных плоскостях, параллельных узким и широким стенкам волновода и проходящим через ось его геометрической симметрии (пл.22 и пл.33 соответственно). Изображение сделано для момента времени t_1, когда вектор $\text{E}(x,z,t)$ достигает в плоскости 11 своего максимального положительного значения. На рис. 5, *г* приведена зависимость составляющей $\text{E}_y(x,z,t)$ от пространственной переменной (координаты) z в плоскости 22 для момента времени t_1, а на рис. 5, *д* – зависимость амплитуды этой составляющей от координаты x в плоскости 11.

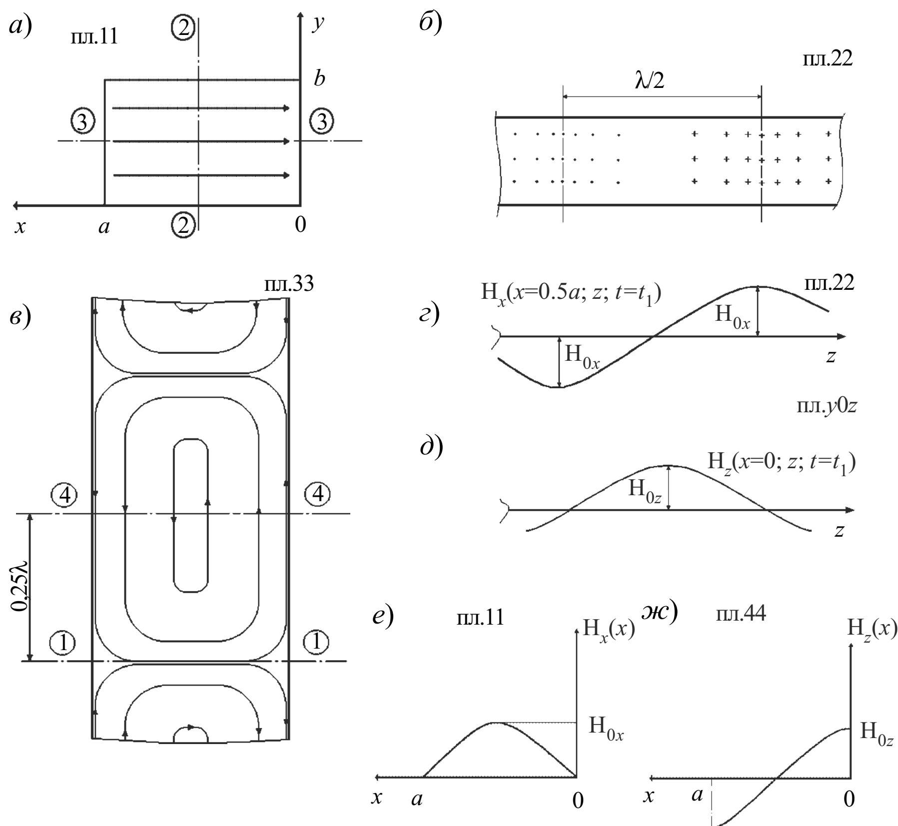


Рис. 6. Структура магнитного поля волны H_{10} в прямоугольном волноводе

На рис. 6, *а*, *б*, *в* изображены силовые линии вектора $\bar{\text{H}}$ волны H_{10} в плоскостях 11, 22 и 33 для момента времени $t = t_1$. На рис. 6, *г*, *д* приведены зависимости составляющей $\text{H}_x(x,z,t)$ от координаты z в пл.22 и составляющей $\text{H}_z(x,z,t)$ от координаты z в плоскости $y0z$ для момента времени t_1. На рис. 6, *е*, *ж* приведены зависимости амплитуд $\text{H}_x(x)$ и $\text{H}_z(x)$ от координаты x в поперечных плоскостях 11 и 44 соответственно.

4.5. Распределение токов проводимости по стенкам волновода, в котором распространяется волна H_{10}

Познакомимся со структурой токов проводимости, возбуждаемых волной H_{10} на внутренних поверхностях стенок волновода (напомним, что стенки волновода считаются идеально проводящими и по ним могут течь только поверхностные токи).

Как известно, вектор плотности поверхностного тока ($\bar{\delta}_{\text{пов}}$), возбуждаемого в идеальном проводнике, перпендикулярен касательной составляющей вектора напряженности магнитного поля ($\bar{\text{H}}_\tau$) электромагнитной волны, возбуждающей этот ток, и связан с ней следующим соотношением:

$$\bar{\delta}_{\text{пов}} = \bar{n} \times \bar{\text{H}}_\tau, \qquad (65)$$

где $\bar{n}$ – внешняя нормаль к поверхности идеального проводника.

Для волны H_{10} касательными к стенкам волновода составляющими вектора $\bar{\text{H}}$ являются:

– для верхней и нижней стенок – составляющие H_x и H_z при $y = 0$ и $y = b$;

– для боковых стенок – составляющая H_z при $x = 0$ и $x = a$.

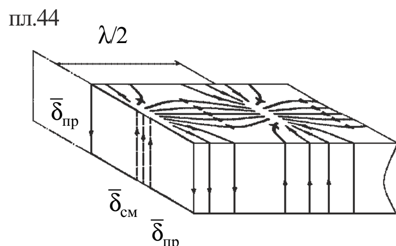


Рис. 7. Силовые линии токов проводимости, текущих по стенкам прямоугольного волновода, в котором распространяется волна H_{10}

В результате, мгновенная (для момента времени $t = t_1$) картина силовых линий векторов плотности токов проводимости, текущих по внутренним поверхностям стенок волновода, будет иметь вид, изображенный на рис. 7. Важно отметить, что в локальных областях, расположенных в центре волновода на расстоянии $\Lambda/2$ друг от друга, из которых исходят (или в которые вхо-

дят) силовые линии токов проводимости, эти силовые линии замыкаются силовыми линиями токов смещения $\overline{\delta}_{\text{см}}$ (напомним, что $\overline{\delta}_{\text{см}} = \partial \overline{\text{E}} /\partial t$). Для того, чтобы не загромождать рис. 7, на нем изображены только те силовые линии токов смещения, которые находятся в плоскости поперечного сечения 44.

Знание картины силовых линий токов проводимости необходимо для решения задачи размещения излучающих или неизлучающих щелей на стенках волновода. Излучающими являются щели, прорезанные перпендикулярно силовым линиям токов проводимости, а неизлучающими – параллельно этим силовым линиям. Следовательно, если в волноводе распространяется волна H_{10}, то любая щель, прорезанная в боковой стенке волновода параллельно оси $0z$ будет излучающей, в то время как щель, прорезанная посередине широкой стенки волновода параллельно оси $0z$, – неизлучающей и т.д.

4.6. Структуры полей H-волн высших типов в прямоугольном волноводе

Анализ структуры электромагнитного поля любой H-волны высшего типа следует начинать с преобразования системы уравнений (54) или (55) с учетом конкретных значений индексов m и n рассматриваемой волны. После этого следует изобразить картины силовых линий векторов $\overline{\text{E}}$ и $\overline{\text{H}}$ данной волны.

Большую помощь в решении этой задачи может оказать следующее правило. Структуру поля волны H_{10} можно считать базовой при построении картин силовых линий векторов $\overline{\text{E}}$ и $\overline{\text{H}}$ собственных волн H_{m0} и H_{0n}. Так, например, для волны H_{20} картина силовых линий векторов $\overline{\text{E}}$ и $\overline{\text{H}}$ в поперечном сечении волновода получается путем двукратного воспроизведения базовой структуры вдоль широкой стенки волновода (с учетом фазовых соотношений соседних структур); для волны H_{30} – трехкратным воспроизведением, и т. д. Для волны H_{01} базовая структура будет повернута на угол 90°; для волны H_{02} – повернута на 90° и воспроизведена дважды и т.д. (рис. 8).

Несколько сложнее решается задача построения картины силовых линий векторов $\overline{\text{E}}$ и $\overline{\text{H}}$ собственных волн, у которых индексы m и n оба не равны нулю. В этом случае необходимо сначала построить картину силовых линий волны H_{11}, которая затем, в зависимости от конкретных значений индексов m и n, будет воспроизводиться требуемое число раз

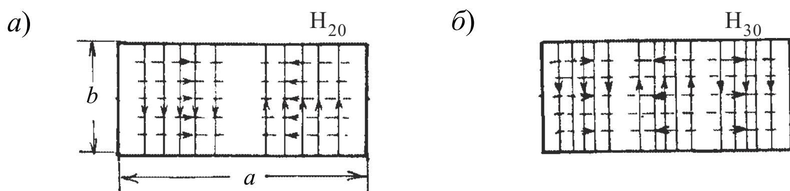


Рис. 8. Силовые линии векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ в поперечном сечении прямоугольного волновода: *а* – для волны H_{20}, *б* – для волны H_{30}

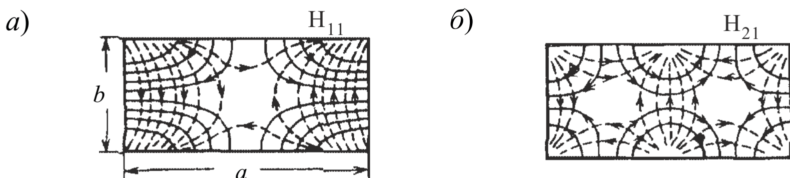


Рис. 9. Силовые линии векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ в поперечном сечении прямоугольного волновода: *а* – для волны H_{11}, *б* – для волны H_{21}

вдоль широкой и узкой стенок волновода. Таким образом, для собственных волн типа H_{mn} базовой структурой является структура поля волны H_{11} (рис. 9).

4.7. Структуры полей Е-волн в прямоугольном волноводе

Среди Е-волн наименьшую критическую длину волны имеет собственная волна E_{11} ($\lambda_{кр} = 2ab / (a^2 + b^2)^{0.5}$). Система уравнений волны E_{11} имеет следующий вид:

$$\dot{E}_x = -j\, E_{0x} \cos((\pi/a)x) \sin((\pi/b)y) \exp(-jKz),$$

$$\dot{E}_y = -j\, E_{0y} \sin((\pi/a)x) \cos((\pi/b)y) \exp(-jKz),$$

$$\dot{E}_z = E_{0z} \sin((\pi/a)x) \sin((\pi/b)y) \exp(-jKz),$$

$$\dot{H}_x = j\, H_{0x} \sin((\pi/a)x) \cos((\pi/b)y) \exp(-jKz),$$

$$\dot{H}_y = -j\, H_{0y} \cos((\pi/a)x) \sin((\pi/b)y) \exp(-jKz),$$

$$\dot{H}_z = 0. \qquad (66)$$

Картина силовых линий векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ этой волны в поперечном сечении волновода изображена на рис 10. Структура поля волны E_{11} являет-

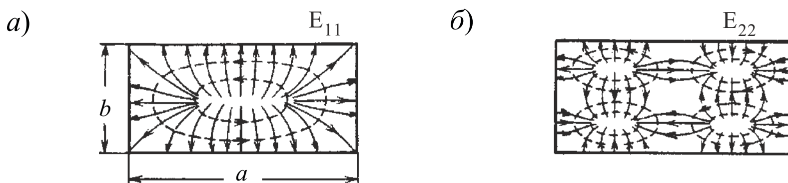


Рис. 10. Силовые линии векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ в поперечном сечении прямоугольного волновода: а – для волны E_{11}, *b* – для волны E_{22}

ся базовой при построении картин силовых линий векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ собственных волн E_{mn} (см. правило, изложенное в предыдущем подразделе).

4.8. Физический смысл индексов *m* и *n*, входящих в обозначение собственных волн прямоугольного волновода

Знакомство со структурой полей собственных волн высших типов облегчает понимание физического смысла индексов *m* и *n*, входящих в обозначения этих волн.

Во всех собственных волнах поле в поперечном сечении волновода представляет собой стоячие волны, пространственные периоды которых вдоль осей $0x$ и $0y$ равны λ_x и λ_y соответственно. Индекс *m* показывает сколько полуволн стоячей волны укладывается вдоль широкой стенки волновода, а индекс *n* – сколько полуволн стоячей волны укладывается вдоль узкой стенки волновода.

Формально это заключение можно сделать на основании следующих математических выкладок:

$\lambda_x = 2\pi/k_x = 2\ \pi\ /\ (m\pi/a) = 2a\ /\ m$, $\lambda_y = 2\pi/k_y = 2\ \pi\ /\ (m\pi/b) = 2b\ /\ m$.

Отсюда $m = a\ /\ (\lambda_x\ /2)$; $n = b\ /\ (\lambda_y\ /2)$.

5. СТРУКТУРА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ Е- И Н-ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ

Круглым волноводом называют односвязный металлический волновод, поперечное сечение которого имеет форму круга. Стандартные круглые волноводы представляют собой латунные или дюралевые трубы круглого поперечного сечения, диаметры которых соответствуют гостированным числовым рядам.

Решение системы уравнений Максвелла для круглого волновода во многом аналогично уже знакомому нам решению этих уравнений для волновода прямоугольного:

уравнения Максвелла должны быть записаны в форме (1), а их решение должно удовлетворять граничному условию (2);

решение этих уравнений мы будем искать в виде суперпозиции плоских неоднородных Е- и Н-волн, распространяющихся вдоль волновода:

волновые уравнения мы будем решать только для продольных составляющих векторов $\overline{\mathrm{E}}$ и $\overline{\mathrm{H}}$, а поперечные составляющие этих векторов находить с помощью уравнений связи;

зависимость продольных составляющих векторов $\overline{\mathrm{E}}$ и $\overline{\mathrm{H}}$ от пространственной переменной z, направленной вдоль волновода, будет иметь вид $\dot{\mathrm{Z}}(z) = A\exp(-jKz)$

Отличие состоит в том, что при определении зависимости продольных составляющих векторов $\overline{\mathrm{E}}$ и $\overline{\mathrm{H}}$ от поперечных пространственных переменных, уравнение (17) должно быть раскрыто и проинтегрировано в цилиндрической системе координат, так как именно в этой системе одна из координатных поверхностей может совпадать с внутренней поверхностью стенки круглого волновода (см. выводы подразд. 3.3).

5.1. Системы уравнений для Е- и Н-волн в круглом волноводе

Ориентируем цилиндрическую систему координат (ρ,φ,z) так, чтобы ось $0z$ этой системы совпала с продольной осью симметрии круглого волновода (рис. 11). В этом случае функция $\Psi(\xi,\eta)$ станет функцией $\Psi(\rho,\varphi)$, а уравнение координатной поверхности, совпадающей с внутренней поверхностью стенки волновода, будет иметь вид $\rho = a$, где a – радиус волновода.

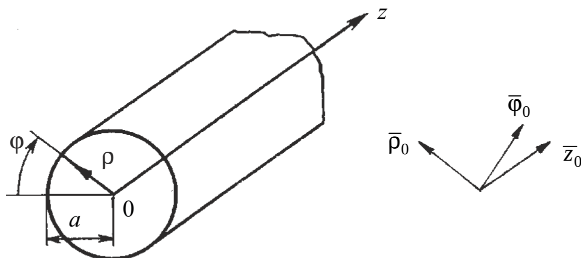


Рис. 11. Система координат круглого волновода

Граничное условие (2) в рассматриваемом случае трансформируется в следующие соотношения:

$$\dot{\mathrm{E}}_z \big|_{\rho=a} = 0, \tag{66}$$

$$\dot{E}_\varphi |_{\rho = a} = 0. \quad (67)$$

Для дальнейших вычислений нам потребуются также граничные условия для продольной составляющей $\dot{H}_z$ или ее пространственных производных, которые следует вывести из условий (66), (67) и уравнений связи (9). Воспользовавшись условием (67) и вторым уравнением из системы уравнений связи (9), имеем:

$$\partial \dot{H}_z / \partial\rho |_{\rho = a} = 0. \quad (68)$$

Уравнение (17), записанное в цилиндрической системе координат будет иметь следующий вид (см. выражение (12)):

$$\partial^2 \Psi(\rho,\varphi)/\partial\rho^2 + (1/\rho)\,(\partial\Psi(\rho,\varphi)/\partial\rho) +$$
$$+(1/\rho^2)\,(\partial^2 \Psi(\rho,\varphi)/\partial\varphi^2) + æ^2\,\Psi(\rho,\varphi) = 0. \quad (69)$$

Решение уравнения (69) будем осуществлять методом Фурье. Представим функцию $\Psi(\rho,\varphi)$, зависящую от двух переменных ρ и φ, в виде произведения двух функций $P(\rho)$ и $\Phi(\varphi)$, каждая из которых зависит только от одной из этих переменных:

$$\Psi(\rho,\varphi) = P(\rho)\,\Phi(\varphi). \quad (70)$$

Подставим (70) в (69) и после несложных преобразований получим

$$(\rho^2/P(\rho))\,\partial^2P(\rho)/\partial\rho^2 + (P(\rho)/\rho)\,(\partial P(\rho)/\partial\rho) + æ^2\rho^2 =$$
$$= -(1/\Phi(\varphi))\,(\partial^2\Phi(\varphi)/\partial\varphi^2). \quad (71)$$

Левая и правая части этого уравнения зависят от разных переменных, поэтому оно может быть справедливо только в том случае, когда обе его части равны одной и той же постоянной величине. Пусть этой постоянной величиной будет некоторый коэффициент m^2, физический смысл которого мы определим позднее. В этом случае уравнение (71) может быть представлено в виде системы из двух однородных дифференциальных уравнений:

$$\partial^2\Phi(\varphi)/\partial\varphi^2 + m^2\,\Phi(\varphi) = 0, \quad (72)$$

$$(\rho^2/P(\rho))\,\partial^2P(\rho)/\partial\rho^2 + (P(\rho)/\rho)\,(\partial P(\rho)/\partial\rho) + æ^2\rho^2 - m^2 = 0. \quad (73)$$

Уравнение (72) является уже хорошо нам знакомым однородным дифференциальным уравнением второго порядка, решением которого могут быть показательные или тригонометрические функции (см. (19) и

(20)). Помня о том, что мы ищем распределение поля в поперечном сечении волновода, где это поле представляет собой стоячие волны, оставляем решение в виде суммы тригонометрических функций

$$\Phi(\varphi) = M_1 \cos (m\varphi) + M_2 \sin (m\varphi). \quad (74)$$

где M – амплитудный коэффициент.

Так как рассматриваемый волновод обладает круговой симметрией, то начало отсчета угла φ может быть выбрано произвольно и формулу для $\Phi(\varphi)$ можно записать в следующем виде:

$$\Phi(\varphi) = M \cos (m\varphi). \quad (75)$$

Коэффициент m, входящий в аргумент косинуса в выражении (75), может быть только целым числом, так как значение функции $\Phi(\varphi)$ не должно изменяться при изменении φ на величину, кратную 2π. Таким образом

$$m = 0, 1, 2, \ldots \quad (76)$$

Величина амплитудного коэффициента M зависит от параметров источника, возбуждающего собственные волны в волноводе.

Займемся решением уравнения (73). После несложных преобразований оно может быть представлено в следующем виде:

$$\partial^2 P(\xi)/\partial\xi^2 + (1/\xi)\,(\partial P(\xi)/\partial\xi) + (1 - m^2/\xi^2)\,P(\xi) = 0, \quad (77)$$

где ξ = æρ – независимая переменная.

Уравнение (77) представляет собой хорошо известное в математической физике уравнение Бесселя, решением которого являются специальные функции Бесселя первого и второго рода порядка m (J_m и N_m соответственно):

$$P(\xi) = A\,J_m(\xi) + B\,N_m(\xi), \quad (78)$$

где m –порядок функции Бесселя.

Графики функций $J_m(\xi)$ и $N_m(\xi)$ для различных значений m приведены на рис. 12. Вернувшись в выражении (78) к переменной æρ, видим, что исходя из физических соображений коэффициент B должен равняться 0, так как в противном случае в центре волновода (при $\rho = 0$) напряженность электрического или магнитного поля оказывается равной бесконечности. Таким образом, приемлемым для рассматриваемого случая решением уравнения (77) является

$$\mathrm{P}(æ\rho) = A\,J_m(æ\rho). \quad (79)$$

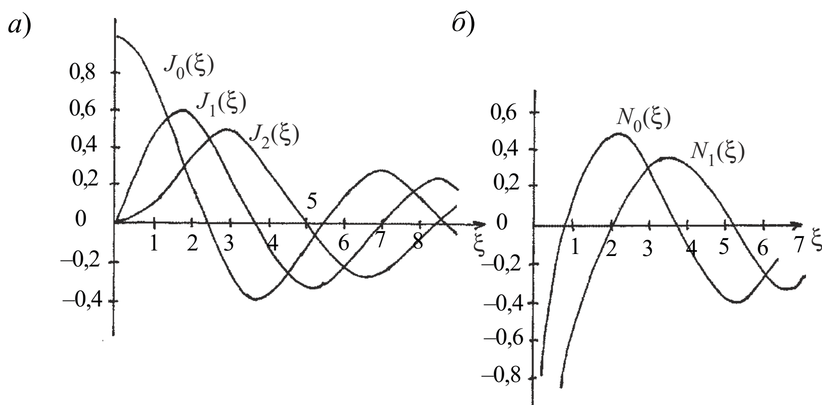


Рис. 12. Графики функций: *а* – J_m(x), *б* – N_m(x)

Подставив (79) и (75) в выражение (70) и обозначив $C = AM$, получаем решение уравнения (69)

$$\Psi(\rho,\varphi) = C\, J_m(æ\rho)\cos(m\varphi). \qquad (80)$$

В выражении (80) амплитудный коэффициент C зависит от параметров источника, возбуждающего волновод, коэффициент m может принимать целые положительные значения, включая 0 (см. (76)), а поперечное волновое число æ должно быть определено из граничных условий. Напомним, что для Е-волн функция $\Psi(\rho,\varphi)$ эквивалентна составляющей $\dot{E}_z$, а для Н-волн – составляющей $\dot{H}_z$. Следовательно, в зависимости от типа собственной волны, граничными условиями для функции $\Psi(\rho,\varphi)$ будут либо (66), либо (68).

Определение поперечного волнового числа для Е-волн ($æ^E$*)*. Воспользуемся граничным условием (66). Подставим $\Psi(\rho{=}a, \varphi) = 0$ в выражение (80):

$0 = C\, J_m(æ^E a)\cos(m\varphi)$. Отсюда $æ^E a = \nu_{mn}$,

где ν_{mn} – корни функции $J_m(\xi)$ (напомним, что корнем функции называется такое значение ее аргумента, при котором функция обращается в ноль); n – номер корня этой функции (n = 1, 2, 3…).

Следовательно,

$$æ^E = \nu_{mn} / a. \qquad (81)$$

В табл. 1 приведены численные значения некоторых корней функций $J_m(\xi)$ (см. также графики на рис. 12).

Таблица 1

Корни (ν_{mn}) функции J_m для некоторых значений m и n

n	m		
	0	1	2
1	2,405	3,832	5,136
2	5,520	7,016	8,417
3	8,654	10,173	11,620

Определение поперечного волнового числа для Н-волн (æ$^{\text{Н}}$). Так как в данном случае известны граничные условия не для самой составляющей $\dot{\text{H}}_z$ а лишь для ее первой производной $\partial \dot{\text{H}}_z/\partial\rho$, то чтобы воспользоваться этими граничными условиями необходимо продифференцировать функцию $\Psi(\rho,\varphi)$ по переменной ρ:

$$\partial\Psi(\rho,\varphi)/\partial\rho = æ^{\text{H}} A\, J'_m(æ^{\text{H}}\rho), \tag{82}$$

где $J'_m(æ^{\text{H}}\rho)$ – первая производная функции $J_m(æ^{\text{H}}\rho)$ по переменной ρ (график функции $J'_m(\xi)$ приведен на рис. 13).

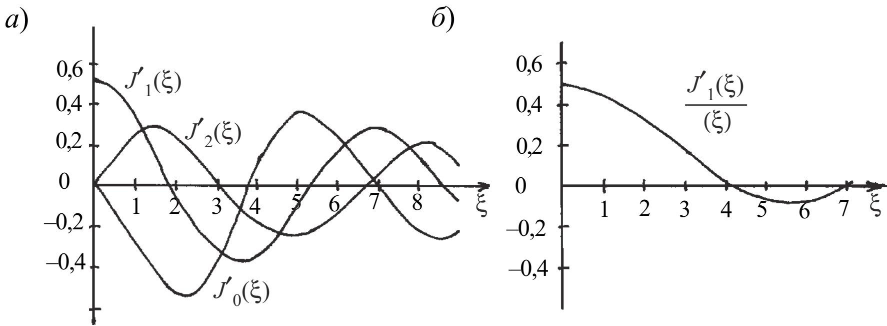


Рис. 13. Графики функций: *а* – $J'_m(\xi)$, *б* – $J'_m(\xi)/(\xi)$

Теперь можно воспользоваться граничным условием (68). Подставим $\partial\Psi(\rho,\varphi)/\partial\rho\,|_{\rho=a} = 0$ в выражение (82) и получим следующее уравнение:

$$0 = æ^{\text{H}} A\, J'_m(æ^{\text{H}} a). \text{ Отсюда } æ^{\text{H}} a = c_{mn},$$

где c_{mn} – корни функции $J'_m(\xi)$; n – номер корня этой функции (n = 1, 2, 3 …).

Следовательно,

$$æ^{\text{H}} = \chi_{mn} / a. \tag{83}$$

В табл. 2 приведены численные значения некоторых корней функции $J'_m(\xi)$ (см. также график на рис. 13).

Таблица 2

Корни (χ_{mn}) функции J'_m для некоторых значений *m* и *n*

n	*m*		
	0	1	2
1	3,832	1,841	3,054
2	7,016	5,331	6,706
3	10,173	8,536	9,969

Как следует из (81), (83), табл. 1 и табл. 2 в круглом волноводе, в отличие от прямоугольного, поперечные волновые числа для Е- и Н-волн с одинаковыми индексами не равны друг другу. Следовательно, и продольные волновые числа для этих волн также будут отличаться друг от друга:

$$K^{E} = (k^2 - (æ^{E})^2)^{0.5}\ ;\ K^{H} = (k^2 - (æ^{H})^2)^{0.5}. \qquad (84)$$

Вычислив $æ^{E}$ и $æ^{H}$, можно записать формулы, определяющие зависимость продольной составляющей $\dot{E}_z$ вектора $\overline{E}$ (для Е-волн) и продольной составляющей $\dot{H}_z$ вектора $\overline{H}$ (для Н-волн) от пространственных координат, в следующем виде (см. выражения (14), (80), (81), (83) и (84)):

$$\dot{E}_z(\rho,\varphi,z) = E_0\, J_m(æ^{E}\rho)\cos(m\varphi)\exp(-jK^{E} z), \qquad (85)$$

$$\dot{H}_z(\rho,\varphi,z) = H_0\, J_m(æ^{H}\rho)\cos(m\varphi)\exp(-jK^{H} z). \qquad (86)$$

Теперь необходимо воспользоваться уравнениями связи (8) и (9) и, взяв первые производные по переменным ρ и φ от составляющих $\dot{E}_z$ и $\dot{H}_z$ вывести формулы для поперечных составляющих векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$. В результате будут получены системы уравнений для векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$ электрических и магнитных волн в круглом волноводе:

для Е-волн

$$\dot{E}_\rho = (-j\,K^{E} / æ^{E})\, E_0\, J'_m(æ^{E}\rho)\cos(m\varphi)\exp(-j\,K^{E} z),$$

$$\dot{E}_\varphi = (j\,K^{E} / æ^{E})\, m\, E_0\,(J_m(æ^{E}\rho)/(æ^{E}\rho))\sin(m\varphi)\exp(-j\,K^{E} z),$$

$$\dot{E}_z = E_0\, J_m(æ^{E}\rho)\cos(m\varphi)\exp(-j\,K^{E} z),$$

$$\dot{H}_\rho = (-j\,\omega\varepsilon_a / æ^{E})\, m\, E_0\,(J_m(æ^{E}\rho)/(æ^{E}\rho))\sin(m\varphi)\exp(-j\,K^{E} z),$$

$$\dot{H}_\varphi = (-j\,\omega\varepsilon_a / æ^E)\, E_0\, J'_m(æ^E\rho)\cos(m\varphi)\exp(-j\,K^E z),$$

$$\dot{H}_z = 0. \qquad (87)$$

Уравнения (87) могут быть записаны в более компактном виде:

$$\dot{E}_\rho = -j\, E_{0\rho}\, J'_m(æ^E\rho)\cos(m\varphi)\exp(-j\,K^E z) = -j\, E_\rho(\rho,\varphi)\exp(-j\,K^E z),$$

$$\dot{E}_\varphi = j\, E_{0\varphi}\,(J_m(æ^E\rho)/(æ^E\rho))\sin(m\varphi)\exp(-j\,K^E z) = j\, E_\varphi(\rho,\varphi)\exp(-j\,K^E z),$$

$$\dot{E}_z = E_{0z}\, J_m(æ^E\rho)\cos(m\varphi)\exp(-j\,K^E z) = E_z(\rho,\varphi)\exp(-j\,K^E z),$$

$$\dot{H}_\rho = -jH_{0\rho}\,(J_m(æ^E\rho)/(æ^E\rho))\sin(m\varphi)\exp(-j\,K^E z) = -j\, H_\rho(\rho,\varphi)\exp(-j\,K^E z),$$

$$\dot{H}_\varphi = -j\, H_{0\varphi}\, J'_m(æ^E\rho)\cos(m\varphi)\exp(-jK^E z) = -j\, H_\varphi(\rho,\varphi)\exp(-j\,K^E z),$$

$$\dot{H}_z = 0. \qquad (88)$$

Формулы для амплитуд составляющих векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$ поперечно-магнитных волн (Е-волн) круглого волновода выглядят следующим образом:

$$E_\rho(\rho,\varphi) = E_{0\rho}\, J'_m(æ^E\rho)\cos(m\varphi),$$

$$E_\varphi(\rho,\varphi) = E_{0\varphi}\,(J_m(æ^E\rho)/(æ^E\rho))\sin(m\varphi),$$

$$E_z(\rho,\varphi) = E_{0z}\, J_m(æ^E\rho)\cos(m\varphi),$$

$$H_\rho(\rho,\varphi) = H_{0\rho}\, J'_m(æ^E\rho)\cos(m\varphi),$$

$$H_\varphi(\rho,\varphi) = H_{0\varphi}\,(J_m(æ^E\rho)/(æ^E\rho))\sin(m\varphi); \qquad (89)$$

для Н-волн

$$\dot{E}_\rho = (j\,\omega\mu_a / æ^H)\, m\, H_0\,(J_m(æ^H\rho)/(æ^H\rho))\sin(m\varphi)\exp(-j\,K^H z),$$

$$\dot{E}_\varphi = (j\,\omega\mu_a / æ^H)\, H_0\, J'_m(æ^H\rho)\cos(m\varphi)\exp(-j\,K^H z),$$

$$\dot{E}_z = 0,$$

$$\dot{H}_\rho = (-j\,K^H / æ^H)\, H_0\, J'_m(æ^H\rho)\cos(m\varphi)\exp(-j\,K^H z),$$

$$\dot{H}_\varphi = (j\,K^H / æ^H)\, m\, H_0\,(J_m(æ^H\rho)/(æ^H\rho))\sin(m\varphi)\exp(-j\,K^H z),$$

$$\dot{H}_z = H_0\, J_m(æ^H\rho)\cos(m\varphi)\exp(-j\,K^H z), \qquad (90)$$

Уравнения (90) могут быть записаны в более компактном виде:

$$\dot{E}_\rho = j\, E_{0\rho}\, (J_m(æ^H\rho)/(æ^H\rho))\, \sin(m\varphi)\, \exp(-j\, K^H z) = j\, E_\rho(\rho,\varphi)\, \exp(-j\, K^H z),$$

$$\dot{E}_\varphi = j\, E_{0\varphi} J'_m(æ^H\rho)\, \cos(m\varphi)\, \exp(-j\, K^H z) = j\, E_\varphi(\rho,\varphi)\, \exp(-j\, K^H z),$$

$$\dot{E}_z = 0,$$

$$\dot{H}_\rho = -j\, H_{0\rho}\, J'_m(æ^H\rho)\, \cos(m\varphi)\, \exp(-j\, K^H z) = -j\, H_\rho(\rho,\varphi)\, \exp(-j\, K^H z),$$

$$\dot{H}_\varphi = jH_{0\varphi}\, (J_m(æ^H\rho)/(æ^H\rho))\, \sin(m\varphi)\, \exp(-j\, K^H z) = jH_\varphi(\rho,\varphi)\, \exp(-j\, K^H z),$$

$$\dot{H}_z = H_{0z}\, J_m(æ^H\rho)\, \cos(m\varphi)\, \exp(-j\, K^H z) = H_z(\rho,\varphi)\, \exp(-j\, K^H z). \qquad (91)$$

Формулы для амплитуд составляющих векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ поперечно-электрических волн (Н-волн) круглого волновода выглядят следующим образом:

$$E_\rho(\rho,\varphi) = E_{0\rho}\, (J_m(æ^H\rho)/(æ^H\rho))\, \sin(m\varphi),$$

$$E_\varphi(\rho,\varphi) = E_{0\varphi} J'_m(æ^H\rho)\, \cos(m\varphi),$$

$$H_\rho(\rho,\varphi) =.H_{0\rho}\, J'_m(æ^H\rho)\, \cos(m\varphi),$$

$$H_\varphi(\rho,\varphi) = H_{0\varphi}\, (J_m(æ^H\rho)/(æ^H\rho))\, \sin(m\varphi),$$

$$H_z(\rho,\varphi) = H_{0z}\, J_m(æ^H\rho)\, \cos(m\varphi). \qquad (92)$$

Критические длины волн для собственых волн круглого волновода могут быть рассчитаны по следующим формулам (см. (32):

$$\lambda^E{}_{кр} = 2\pi\, /\, æ^E,\ \lambda^H{}_{кр} = 2\pi\, /\, æ^H. \qquad (93)$$

Анализ выражений (32), (81), (83), (93) и данных, приведенных в таблицах 1 и 2, показывает, что волной низшего типа в круглом волноводе является волна $H_{11.}$ Исследуем структуру электромагнитного поля этой волны.

5.2. Структура поля волны H_{11} в круглом волноводе

Для волны H_{11} коэффициенты *m* и *n* равны единице, поперечное волновое число $æ^H$ = 1,84/*a*, а критическая длина волны $\lambda^H{}_{кр}$ = 3,41*a*. Следовательно, формулы для амплитуд составляющих векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ этой волны будут выглядеть следующим образом (см. выражения (92)):

$$E_\rho(\rho,\varphi) = E_{0\rho}\, (J_1(1{,}84\rho/a)/(1{,}84\rho/a))\, \sin\varphi,$$

$$E_\varphi(\rho,\varphi) = E_{0\varphi} J'_1(1{,}84\rho/a)\, \cos\varphi,$$

$$H_\rho(\rho,\varphi) = H_{0\rho}\, J'_1(1{,}84\rho/a)\cos\varphi,$$
$$H_\varphi(\rho,\varphi) = H_{0\varphi}\,(J_1(1{,}84\,\rho/a)/(1{,}84\rho/a))\sin\varphi,$$
$$H_z(\rho,\varphi) = H_{0z}\, J_1(1{,}84\rho/a)\cos(\varphi). \quad (94)$$

Формулы для гармонических векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ волны H_{11} имеют следующий вид:

$$\bar{E} = \bar{\rho}_0\, E_\rho(\rho,\varphi)\cos(\omega t - K^H z) + \bar{\varphi}_0\, E_\varphi(\rho,\varphi)\cos(\omega t - K^H z), \quad (95)$$

$$\bar{H} = -\bar{\rho}_0\, H_\rho(\rho,\varphi)\cos(\omega t - K^H z) + \bar{\varphi}_0\, H_\varphi(\rho,\varphi)\cos(\omega t - K^H z) +$$
$$+ \bar{z}_0\, H_z(\rho,\varphi)\sin(\omega t - K^H z), \quad (96)$$

где $\bar{\rho}_0, \bar{\varphi}_0, \bar{z}_0$ – орты (единичные векторы) цилиндрической системы координат, направленные по касательным к ее координатным линиям.

Учитывая, что пространственная переменная ρ изменяется внутри волновода от 0 до a, получаем, что аргументы функций $J_1(1{,}84\rho/a)$ и $J'_1(1{,}84\rho/a)$, определяющих зависимость амплитуд составляющих векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ собственной волны H_{11} от переменной ρ, изменяются от 0 (в центре волновода) до 1,84 (в непосредственной близости к стенке волновода). Оценив, как ведут себя эти функции при данных изменениях их аргументов, и помня, что аргумент функций cos(1φ) и sin(1φ), описывающих зависимость составляющих векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ от пространственной переменной φ, в рассматриваемом случае при изменении φ от 0 до 2 также изменяется от 0 до 2π, можно построить графические изображения силовых линий векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ собственной волны H_{11}.

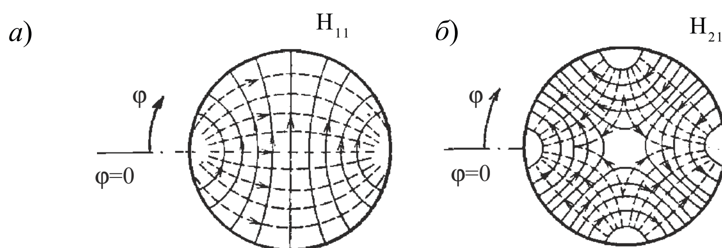


Рис. 14. Силовые линии векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ в поперечном сечении круглого волновода: *а* – для волны H_{11}, *б* – для волны H_{21}

На рис. 14, *а* изображена картина силовых линий векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ волны H_{11} в поперечном сечении круглого волновода. Сплошными изображены силовые линии вектора $\bar{E}$, а пунктирными – силовые линии

вектора $\bar{H}$. Так как вектор $\bar{E}$ имеет только поперечные составляющие, то его силовые линии целиком лежат в плоскости поперечного сечения, выходя из стенки волновода и входя в нее под углом 90°. Силовые линии вектора $\bar{H}$ имеют более сложную форму, так как в окрестностях точек ($\rho=a$, $\varphi=0$) и ($\rho=a$, $\varphi=\pi$) поперечное магнитное поле переходит в продольное – составляющие H_ρ и H_φ в этих точках равны нулю, а составляющая H_z достигает максимума.

Структуру поля волны H_{11} можно считать базовой при построении картины силовых линий векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ собственных волн типа H_{mn}. В качестве примера на рис. 14, *б* изображена картина силовых линий векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ волны H_{21} (см. подразд. 5.5).

5.3. Структура поля волн H_{01} и E_{01} в круглом волноводе

Особенностью структуры электромагнитного поля собственных волн H_{01} и E_{01} является наличие в ней круговой симметрии – составляющие векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ этих волн не зависят от угла φ. Формально это связано с тем, что коэффициент m для них равен 0 (см. (87) и (90)).

Для волны H_{01} поперечное волновое число $æ^H = 3{,}832/a$, а критическая длина волны $\lambda^H_{кр} = 1{,}64a$. Вектор $\bar{E}$ этой волны имеет только одну поперечную составляющую E_φ, а вектор $\bar{H}$ одну поперечную H_ρ и одну продольную H_z, амплитуды которых в плоскости поперечного сечения зависят только от одной пространственной переменной ρ (см. (92)):

$$E_\varphi(\rho) = E_{0\varphi} J'_0(3{,}832\rho/a),$$
$$H_\rho(\rho) = H_{0\rho} J'_0(3{,}832\rho/a),$$
$$H_z(\rho) = H_{0z} J_0(3{,}832\rho/a). \qquad (97)$$

Формулы для гармонических векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ собственной волны H_{01} выглядят следующим образом (см.91)):

$$\bar{E} = \bar{\varphi}_0 E_\varphi(\rho) \cos(\omega t - K^H z). \qquad (98)$$

$$\bar{H} = -\bar{\rho}_0 H_\rho(\rho) \cos(\omega t - K^H z) + \bar{z}_0 H_z(\rho,\varphi) \sin(\omega t - K^H z). \qquad (99)$$

На рис. 15,*а* изображена картина силовых линий векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ волны H_{01} в поперечном сечении круглого волновода. Сплошными изображены силовые линии вектора $\bar{E}$, а пунктирными – силовые линии вектора $\bar{H}$.

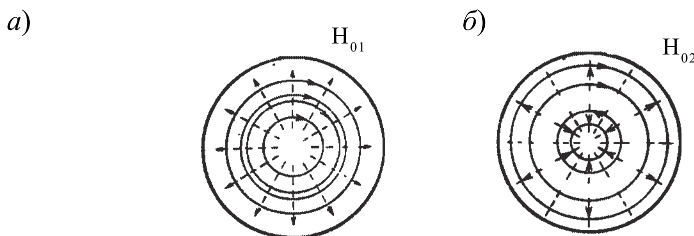


Рис. 15. Силовые линии векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ в поперечном сечении круглого волновода: *а* – для волны H_{01}, *б* – для волны H_{02}

Магнитное поле этой волны у стенок волновода имеет только продольную составляющую H_z, благодаря чему по стенкам могут протекать только поперечные круговые токи. По мере роста частоты колебаний максимум магнитного поля смещается к центру волновода и плотность токов проводимости падает. Поэтому с ростом частоты активные потери, вызванные протеканием токов проводимости, уменьшаются. Следует отметить, что из всех собственных волн круглого волновода подобным свойством обладают только волны типа H_{0n}. Для остальных волн с ростом частоты потери увеличиваются.

Структуру поля волны H_{01} можно считать базовой при построении картины силовых линий векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ собственных волн типа $H_{0n.}$ В качестве примера на рис. 15,*б* изображена картина силовых линий векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ волны $H_{02.}$

Для волны E_{01} поперечное волновое число $æ^E = 2{,}405/a$, а критическая длина волны $\lambda^E{}_{кр} = 2{,}61a$. Вектор $\bar{H}$ этой волны имеет только одну поперечную составляющую H_φ, а вектор $\bar{E}$ одну поперечную E_ρ и одну продольную E_z, амплитуды которых в плоскости поперечного сечения зависят только от одной пространственной переменной ρ (см. (89)):

$$E_\rho(\rho) = E_{0\rho} J'_0(2{,}405\rho/a),$$

$$E_z(\rho) = E_{0z} J_0(2{,}405\rho/a),$$

$$H_\varphi(\rho) = H_{0\varphi} J'_0(2{,}405\rho/a). \quad (100)$$

Формулы для гармонических векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ собственной волны E_{01} имеют следующий вид (см.(88)):

$$\bar{E} = -\bar{\rho}_0 E_\rho(\rho) \cos(\omega t - K^E z) + \bar{z}_0 E_z(\rho) \sin(\omega t - K^E z). \quad (101)$$

$$\bar{H} = -\bar{\varphi}_0 H_\varphi(\rho) \cos(\omega t - K^E z). \quad (102)$$

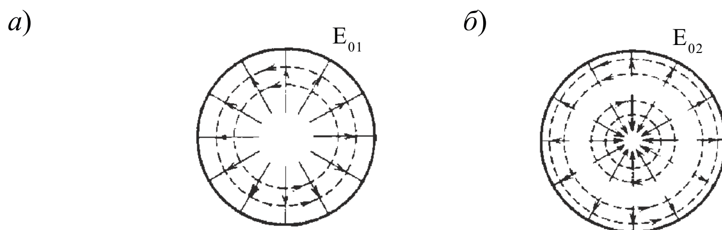


Рис. 16. Силовые линии векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ в поперечном сечении круглого волновода: *а* – для волны E_{01}, *б* – для волны E_{02}

На рис. 16,*а* изображена картина силовых линий векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ волны E_{01} в поперечном сечении круглого волновода. Сплошными изображены силовые линии вектора $\bar{E}$, а пунктирными – силовые линии вектора $\bar{H}$. Благодаря круговой симметрии электрического поля волны E_{01}, круглые волноводы с этой собственной волной часто используются во вращающихся волноводных соединениях.

Структуру поля волны E_{01} можно считать базовой при построении картины силовых линий векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ собственных волн типа E_{0n}. В качестве примера на рис. 16, *б* изображена картина силовых линий векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ волны E_{02}.

5.4. Физический смысл индексов *m* и *n*, входящих в обозначение собственных волн круглого волновода

Индекс *m* входит в качестве постоянного коэффициента в аргументы функций $\cos(m\varphi)$ и $\sin(m\varphi)$, определяющих зависимость составляющих векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ собственных волн волновода от пространственной переменной φ. Для выяснения общих закономерностей, определяющих зависимость этих составляющих от величины коэффициента *m*, достаточно рассмотреть одну из этих функций, например, $\cos(m\varphi)$.

При $m = 0$ имеем $\cos(0\varphi) = 1$ и рассматриваемая составляющая не зависит от угла φ (силовые линии соответствующего вектора представляют собой окружности – см. рис. 15 и рис. 16).

При $m = 1$ зависимость от угла φ определяется функцией $\cos\varphi$. В этом случае во всех точках диаметра $\varphi = \pm(\pi/2)$ рассматриваемая составляющая будет равна нулю. Следовательно, во всех точках диаметра $\varphi = \pm(\pi/2)$ будут находиться узлы (нулевые значения) этой составляющей. Поэтому данный диаметр называют «узловым». При $m = 2$ зависимость рассматриваемой составляющей от пространственной переменной φ определяется функ-

цией cos2φ и узловых диаметров будет два (φ = ± (π/4), φ = ± (3π/4)), при m = 3 – три и т.д.

Таким образом, индекс m определяет число узловых диаметров составляющих векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ собственных волн круглого волновода и показывает какое количество узлов этих составляющих укладывается на половине окружности в поперечном сечении волновода.

Индекс *n* опосредованно входит в аргументы функций Бесселя и их первых производных ($æ^H\rho = \chi_{mn}\rho/a$, $æ^E\rho = \nu_{mn}\rho/a$), которые определяют зависимость составляющих векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ собственных волн круглого волновода от пространственной переменной ρ. Величина n дает информацию о числе корней этих функций, приходящихся на диапазон изменения переменной ρ от 0 до a.

Следовательно, величина n определяет число узлов (нулевых значений) составляющих векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$, укладывающихся вдоль радиуса волновода.

При $n = 1$ узлы рассматриваемой составляющей будут находиться непосредственно на стенке волновода, поэтому величина $(n - 1)$ будет определять количество «узловых окружностей» составляющих векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ собственных волн круглого волновода (окружностей, расположенных на плоскости поперечного сечения волновода, в каждой точке которых рассматриваемые составляющие равны нулю).

5.5. Рекомендации по графическому построению силовых линий векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ в поперечном сечении круглого волновода

Знакомство с узловыми диаметрами и узловыми окружностями позволяет принять следующий порядок действий при построении картины силовых линий векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ в поперечном сечении круглого волновода:

в соответствии со значениями индексов m и n в поперечном сечении волновода наносятся контуры узловых диаметров и узловых окружностей;

вдоль полученных «направляющих» наносятся силовые линии того вектора ($\bar{E}$ или $\bar{H}$), который для данной собственной волны имеет только поперечные составляющие;

перпендикулярно полученным силовым линиям «поперечного» вектора наносятся силовые линии другого вектора, не являющегося для данной собственной волны чисто поперечным;

если силовые линии вектора $\bar{E}$ выходят из стенок волновода или входят в них, то на границе раздела они должны быть перпендикулярны этим стенкам.

Библиографический список

1. *Никольский В. В., Никольская Т. И.* Электродинамика и распространение радиоволн: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1989. 544 с.

2. *Федоров Н. Н.* Основы электродинамики: Учебное пособие для вузов"М.: Высш. школа, 1980. 399 с.

3. *Глаголевский В. Г.* Электродинамика. Электромагнитные волны: Текст лекций /СПбГУАП., 1995. 80 с.

Оглавление

1. Общие понятия и определения 3
1.1. Классификация линий передачи 3
1.2. Некоторые виды линий передачи 3
1.3. Классификация электромагнитных волн, распространяющихся в линиях передачи 4
2. Методы изучения электромагнитных процессов в линиях передачи 5
3. Общие свойства направляемых электромагнитных волн 6
3.1. Постановка задачи и порядок ее решения 6
3.2. Уравнения связи для Е- и Н-волн 7
3.3. Решение волновых уравнений для продольных составляющих векторов напряженности электрического и магнитного поля Е- и Н-волн 9
3.4. Особенности распространение направляемых электромагнитных волн 12
4. Структура электромагнитного поля Е- и Н-волн, распространяющихся в прямоугольном волноводе 17
4.1. Система уравнений для Е-волн в прямоугольном волноводе 17
4.2. Система уравнений для Н-волн в прямоугольном волноводе. 21
4.3. Анализ решений уравнений Максвелла для прямоугольного волновода 22
4.4. Структура поля волны H_{10} в прямоугольном волноводе 25
4.5. Распределение токов проводимости по стенкам волновода, в котором распространяется волна H_{10} 28
4.6. Структуры полей Н-волн высших типов в прямоугольном волноводе 29
4.7. Структуры полей Е-волн в прямоугольном волноводе 30
4.8. Физический смысл индексов *m* и *n*, входящих в обозначение собственных волн прямоугольного волновода 31
5. Структура электромагнитного поля Е- и Н-волн, распространяющихся в круглом волноводе 31
5.1. Системы уравнений для Е- и Н-волн в круглом волноводе 32

5.2. Структура поля волны H_{11} в круглом волноводе 39
5.3. Структура поля волн H_{01} и E_{01} в круглом волноводе 41
5.4. Физический смысл индексов *m* и *n*, входящих в обозначение собственных волн круглого волновода 43
5.5. Рекомендации по графическому построению силовых линий векторов $\bar{E}$ и $\bar{H}$ в поперечном сечении круглого волновода 44
Библиографический список 45

Учебное издание

Калашников Владимир Серафимович
Прусов Андрей Владимирович

ТЕХНИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Направляющие системы и направляемые волны

Учебное пособие

Редактор *А. В. Подчепаева*
Компьютерная верстка *А. Н. Колешко*

Лицензия ЛР №020341 от 07.05.97. Сдано в набор 16.09.01. Подписано к печати 26.11.01. Формат 60×84 1/16. Бумага тип. №3. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,79. Усл. кр.-отт. 2,9. Уч. -изд. л. 3,0. Тираж 100 экз. Заказ №

Редакционно-издательский отдел
Лаборатория компьютерно-издательских технологий
Отдел оперативной полиграфии
СПбГУАП

190000, Санкт-Петербург, ул. Б. Морская, 67